Rappels concernant le filtrage et synthèse de filtres à partir d'un gabarit

2ème année IFIPS
Département Electronique

2009

Cédric KOENIGUER

IFIPS Institut de Formation d'Ingénieurs
UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11

Plan

Fonction de transfert d'un passe-bas

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\,2\sigma\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \xrightarrow[\text{normalisée}]{\text{Fonction}} H(jx) = \frac{H_0}{1 + j\,2\sigma x + (jx)^2}$$

σ : coefficient d'amortissement

$Q = \frac{1}{2\sigma}$: facteur de qualité

Comportement asymptotique

$$H(jx) = \frac{H_0}{1 + j2\sigma x + (jx)^2}$$

x<<1 : $\left|H(jx)\right| \approx H_0$ et $Arg(H(jx)) \approx 0$

x>>1 : $\left|H(jx)\right| \approx H_0/(jx)^2$ et $Arg(H(jx)) \approx -\pi$

x=1 : $\left|H(jx)\right| \approx H_0/2j\sigma$ et $Arg(H(jx)) \approx -\pi/2$

Différentes réponses du diagramme réel

dénominateur : $D(p) = p^2 + 2\sigma\ p + 1$

σ < 1 : non factorisable (pôles complexes)

σ >1 : factorisable (pôles réels)
D(p) = (p-p_1) (p-p_2) avec p_i réels
⇒ produit de fonctions d'ordre 1

$\sigma > \sqrt{2}/2$: amortissement

Max ↔x = 0

$\sigma < \sqrt{2}/2$: pic de résonance

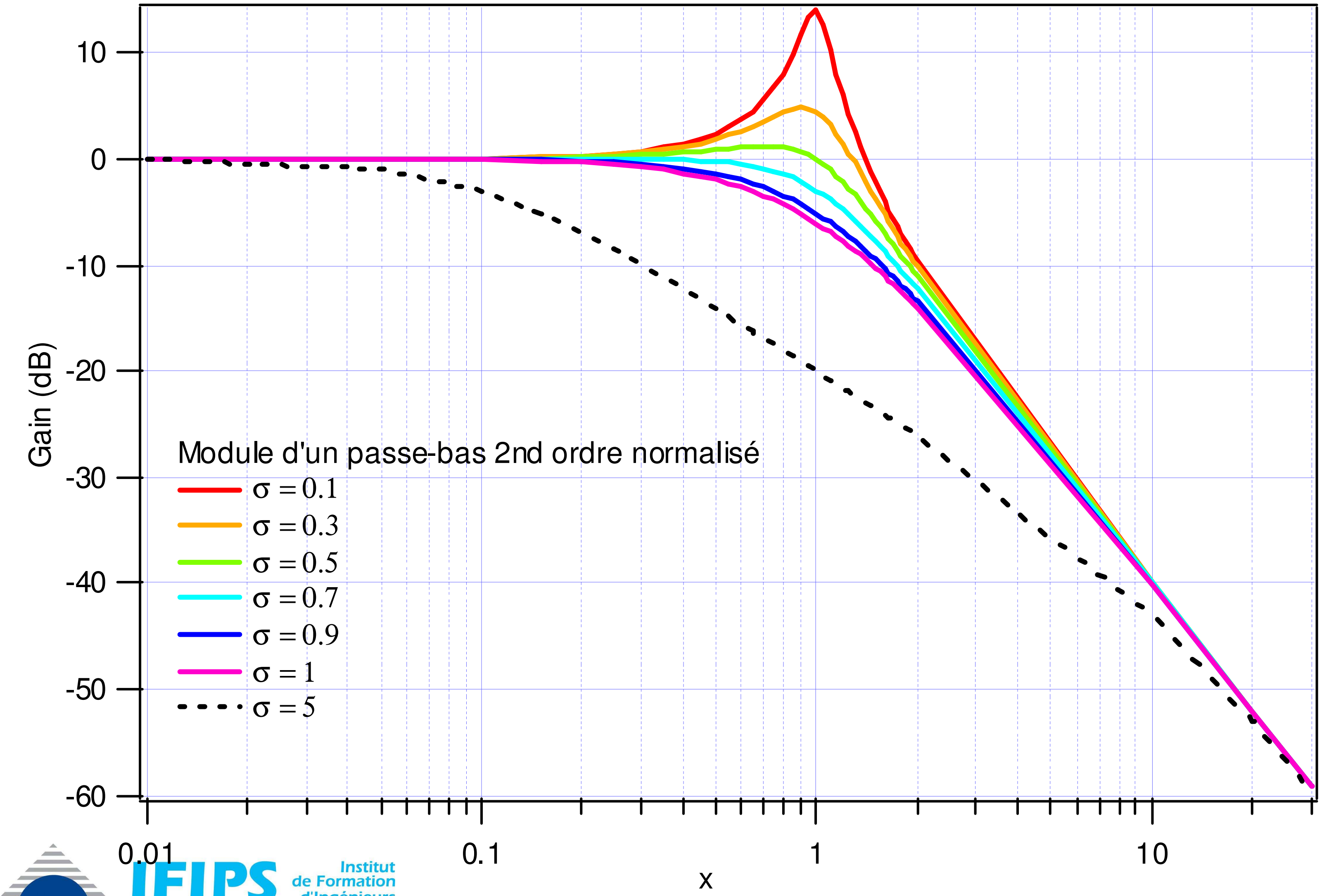
Max : $x_m = \sqrt{1-2\sigma^2} > 1$

$$|H(jx_m)|^2 = \frac{H_0^{\ 2}}{4\sigma^2(1-\sigma^2)}$$

Fréquence de coupure à -3dB :

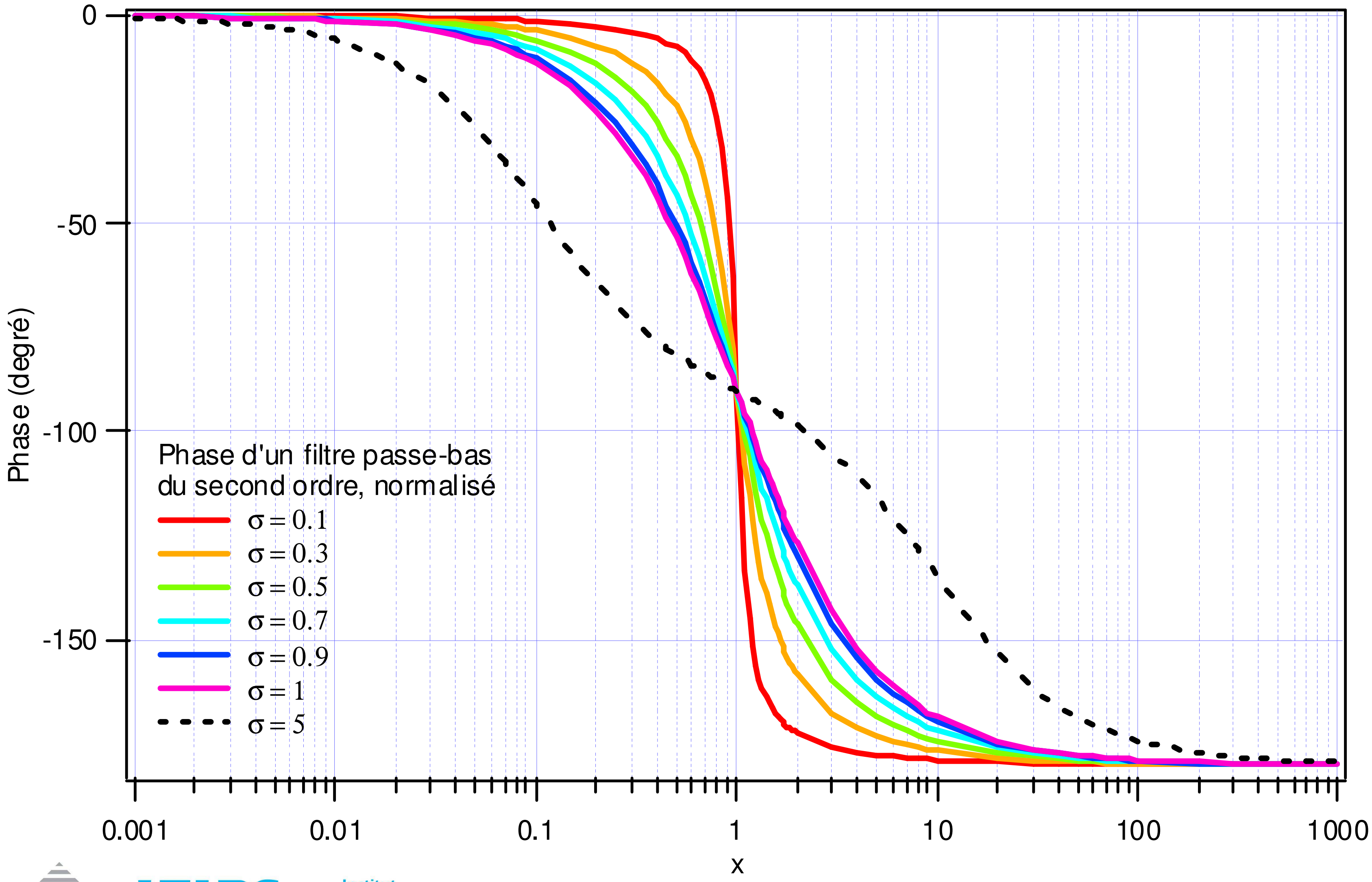
$$x_{-3dB}^{\ \ 2} = 1 - 2\sigma^2 + \sqrt{(2\sigma^2-1)^2+1} > x_m^{\ 2}$$

Diagramme de Bode en amplitude



C. Koeniguer 2009

Diagramme de Bode en Phase



Fonction de transfert d'un passe-haut

$$H(j\omega) = H_0 \frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + j2\sigma\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \xrightarrow[\text{normalisée}]{\text{Fonction}} H(jx) = H_0 \frac{(jx)^2}{1 + j2\sigma x + (jx)^2}$$

σ : coefficient d'amortissement

$Q = \dfrac{1}{2\sigma}$: facteur de qualité

Etude analogue au filtre passe-bas par symétrie

Diagramme de Bode en amplitude

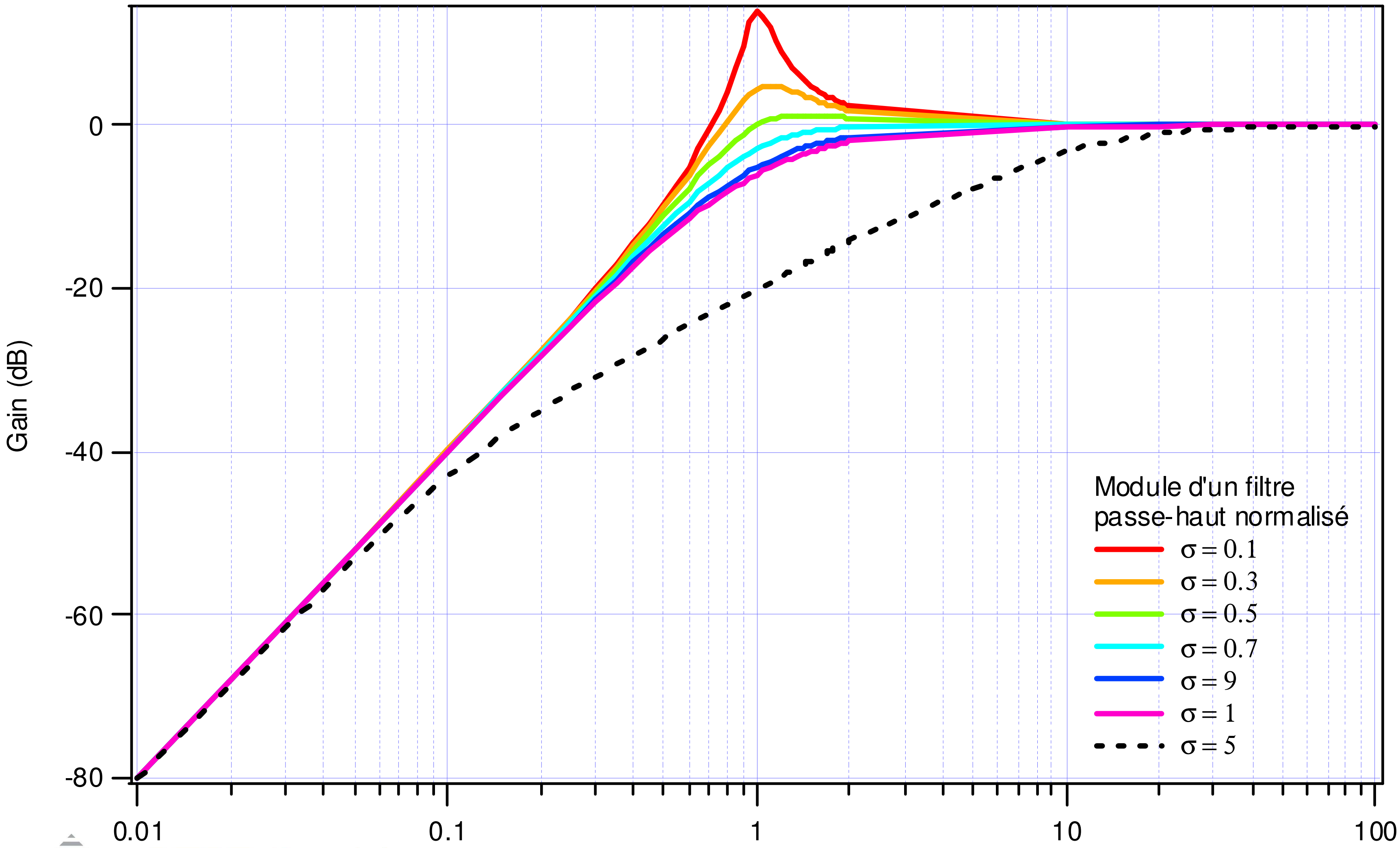
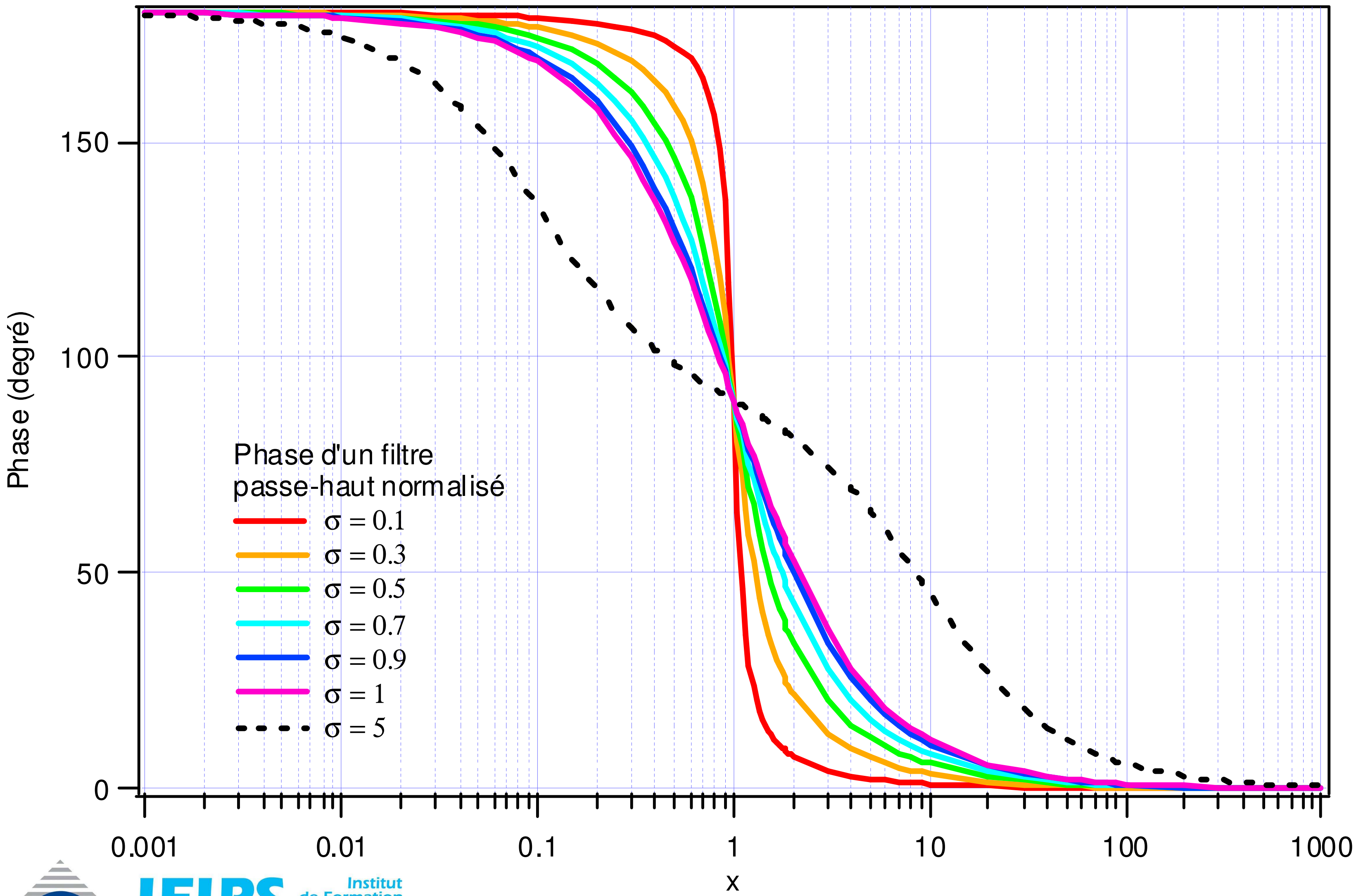


Diagramme de Bode en Phase



Fonction de transfert d'un passe-bande

$$H(j\omega) = H_0 \frac{j2\sigma \dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j2\sigma \dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \xrightarrow{\text{Fonction normalisée}} \begin{cases} H(jx) = H_0 \dfrac{j2\sigma x}{1 + j2\sigma x + (jx)^2} \\[2ex] H(jx) = H_0 \dfrac{1}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \end{cases}$$

σ : coefficient d'amortissement

$Q = \dfrac{1}{2\sigma}$: facteur de qualité

x<<1 : $|H(jx)| \approx H_0 j2\sigma x$

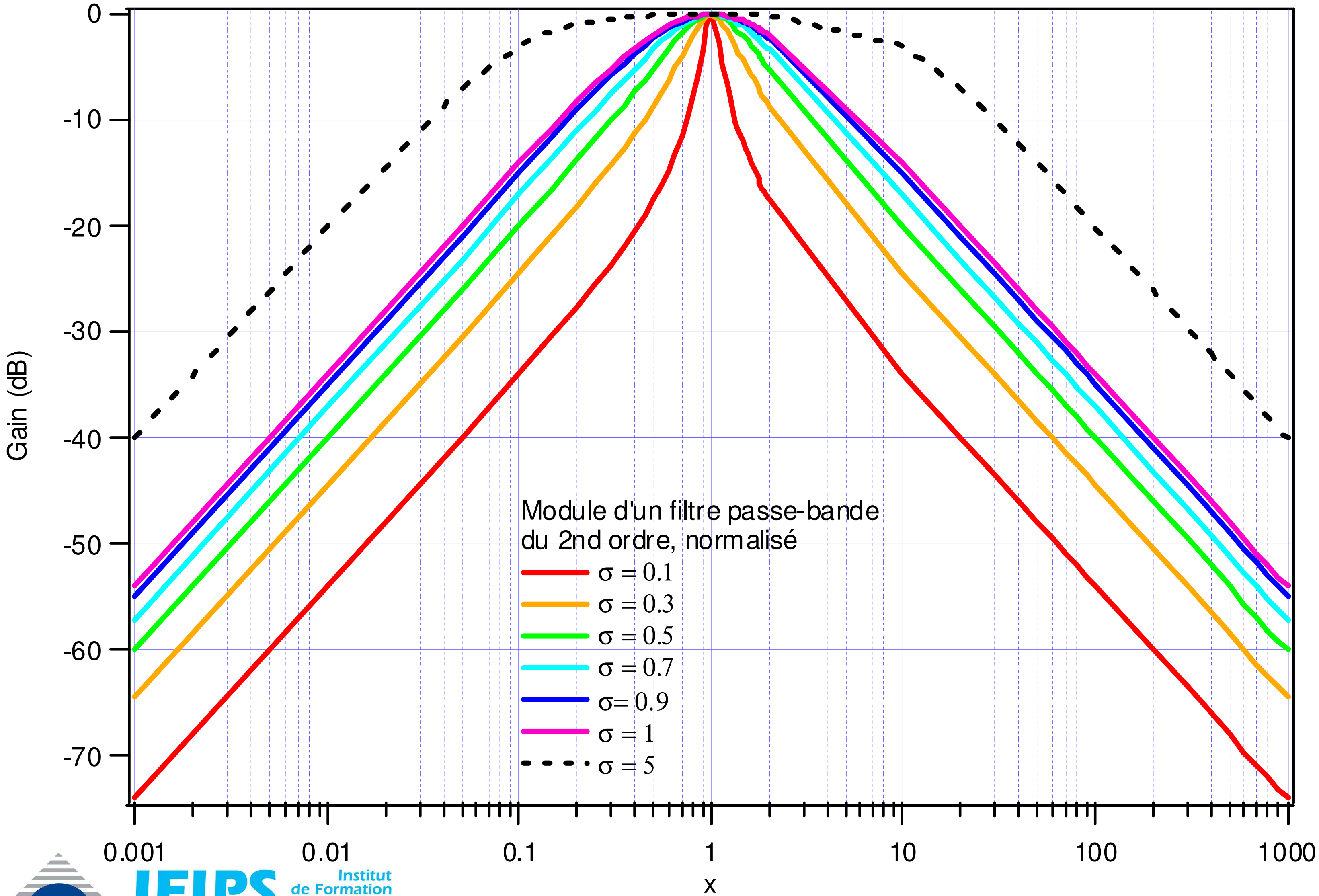
x=1 : $|H(jx)| \approx H_0$

x>>1 : $|H(jx)| \approx H_0 2\sigma / jx$

C. Koeniguer 2009

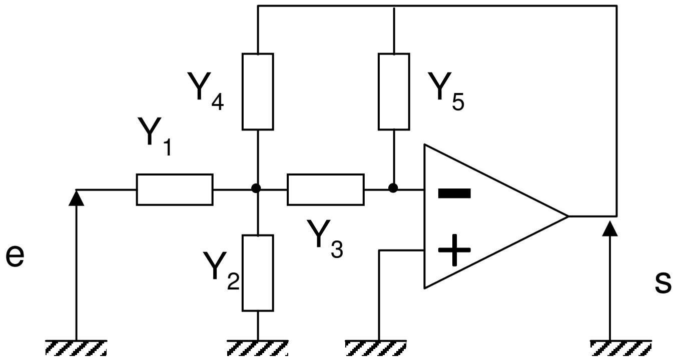
IFIPS Institut de Formation d'Ingénieurs
UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11

Diagramme de Bode en amplitude



Différentes structures

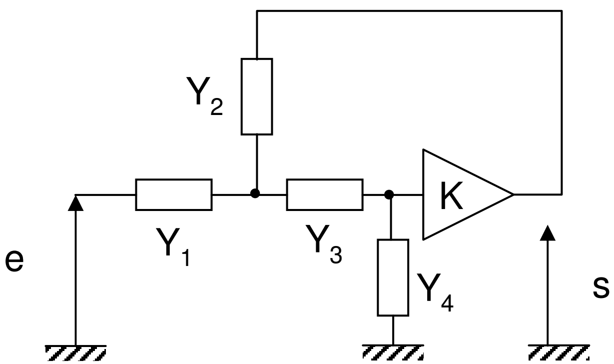
Structure de Rauch :



$$H = \frac{s}{e} = \frac{-Y_1\, Y_3}{Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3\, Y_4}$$

Structure de Sallen-Key :

Y_i : admittances



$$H = \frac{s}{e} = K\,\frac{Y_1\, Y_3}{(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) + Y_3\,(Y_4 - K\, Y_2)}$$

Méthode

• Méthode "empirique" : ajustement manuel des composants pour faire coller la fréquence de coupure à la fréquence attendue

- Avantages :
  - peu de calculs préalables
  - rapide et simple
- Inconvénients :
  - imprécis
  - difficile à mettre en oeuvre pour des ordres élevés

• Nécessité d'une méthode plus rigoureuse répondant à un cahier des charges précis

Rem : la synthèse sera vue uniquement pour les filtres actifs

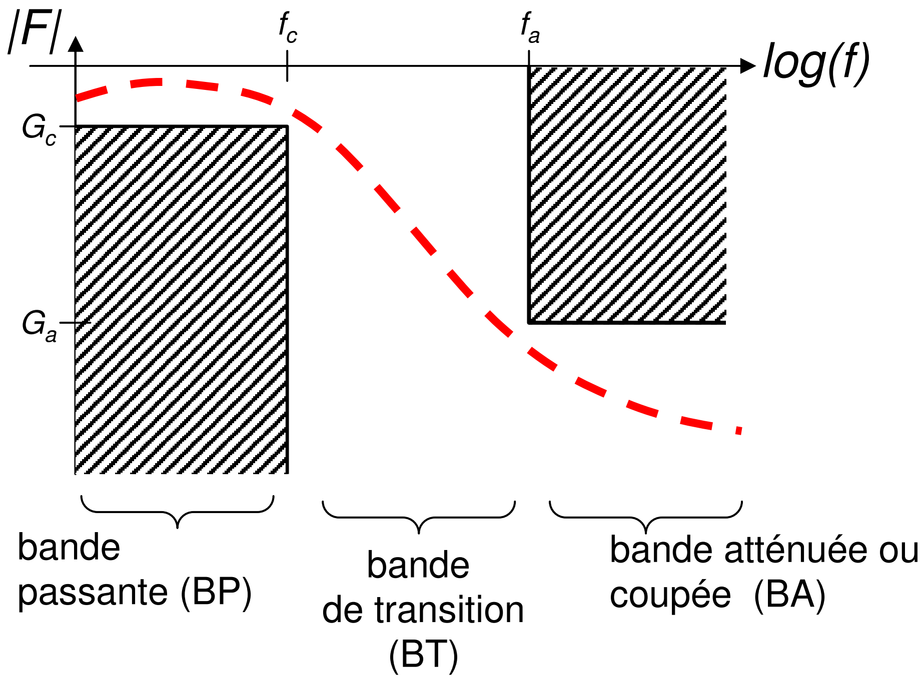
Notion de gabarit

Cahier des charges $\Rightarrow$ réalisation d'un gabarit

Ex : on souhaite que

$|F(jf)| > Gc$ pour $f < f_c$

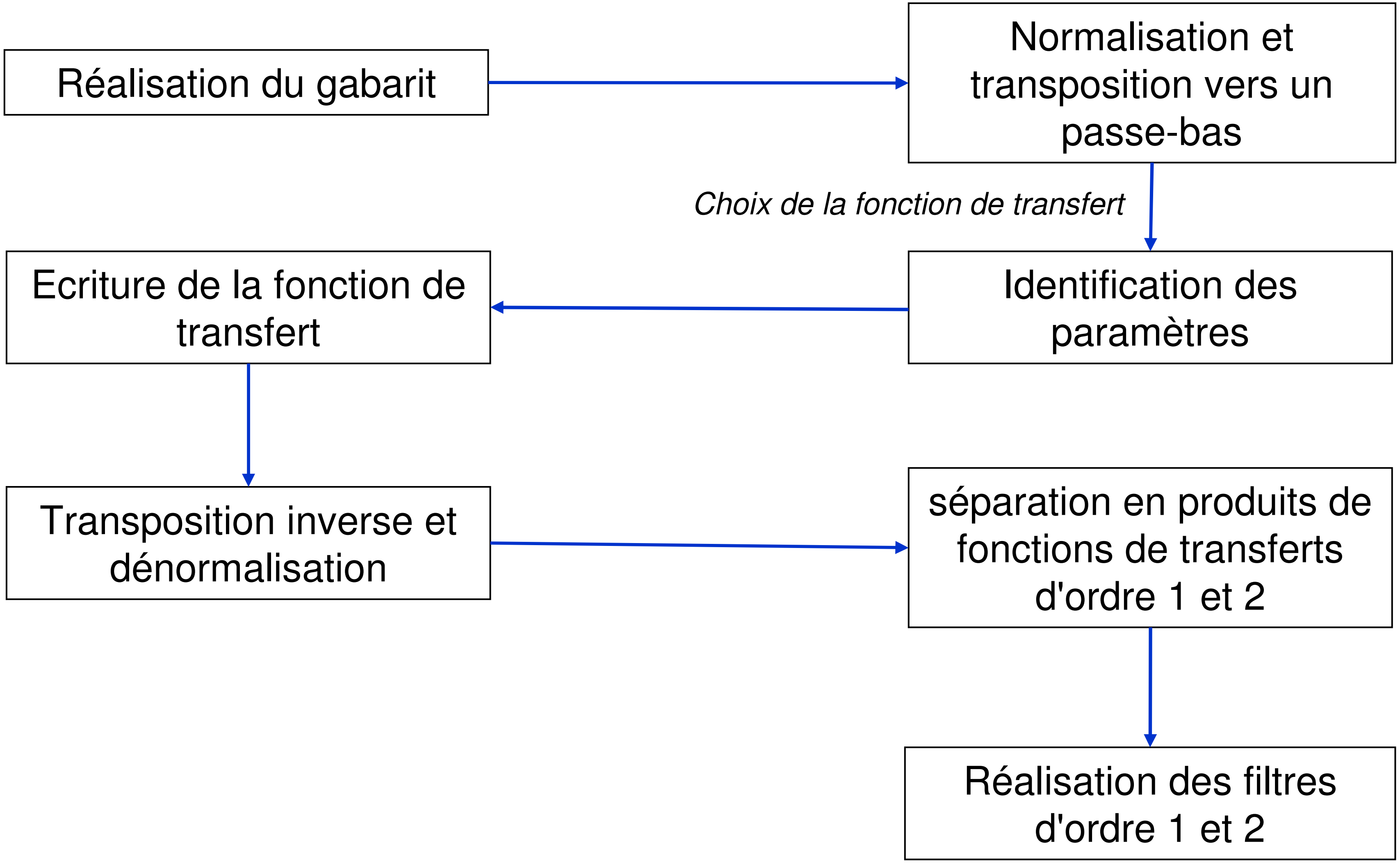
$|F(jf)| < Ga$ pour $f < fc$



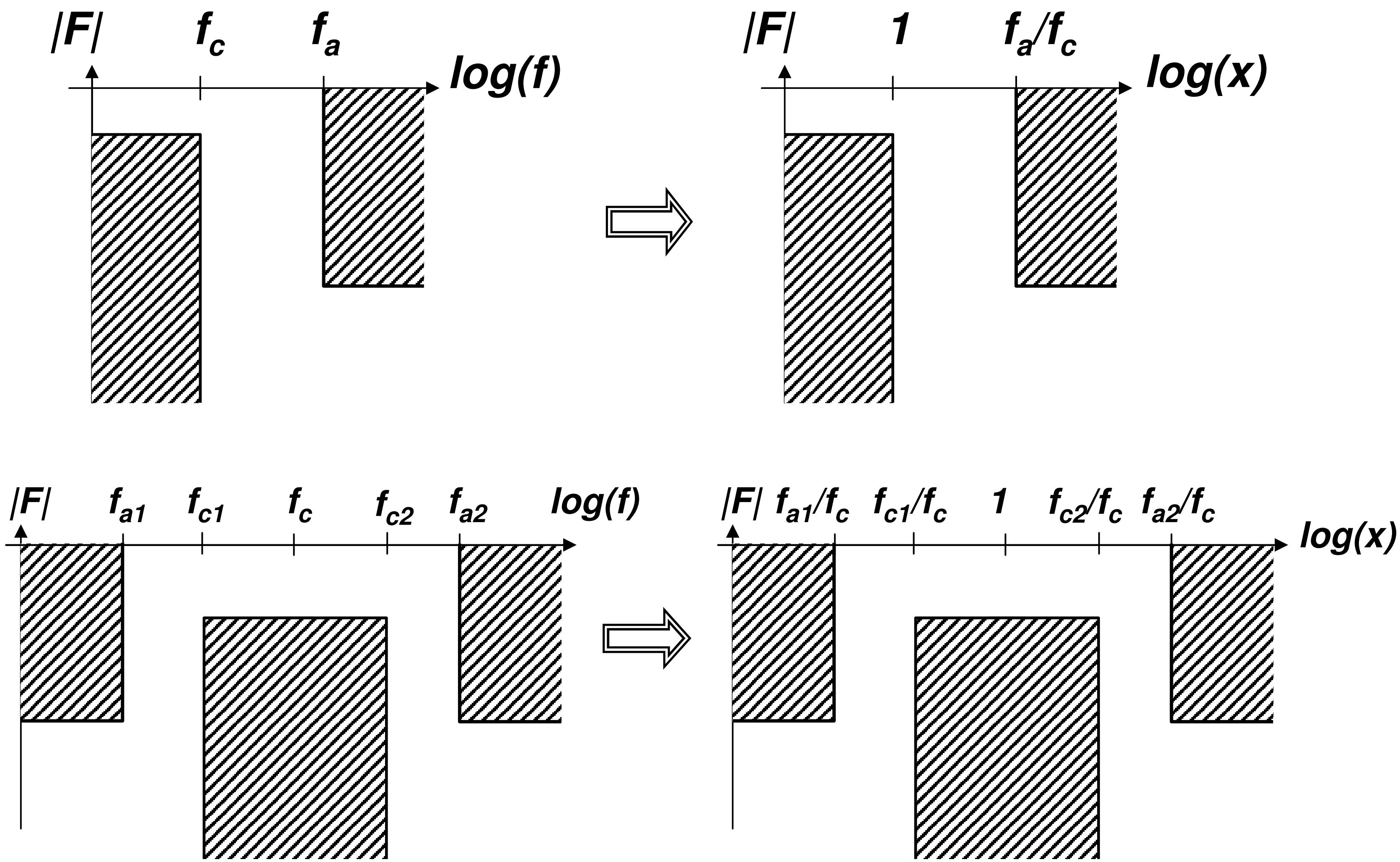
__But de la synthèse__ : trouver une fonction de transfert F qui satisfait ce gabarit

On se ramènera toujours à un gabarit de type passe-bas

Méthode générale



Normaliser les gabarits symétriques



Transposition passe-haut / passe-bande ↔ passe-bas

Transposition passe-haut ↔ passe-bas :

$$\boxed{s = jx}$$

$$s \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$H(s) = H_0 \frac{s^2}{1 + 2\sigma\, s + s^2} \Longleftrightarrow H(s) = H_0 \frac{1}{1 + 2\sigma\, s + s^2}$$

Transposition : passe-bande ↔ passe-bas :

$$s \leftrightarrow \frac{1}{2\sigma}\left(s + \frac{1}{s}\right)$$

$$H(s) = H_0 \frac{1}{1 + Q\left(s + \frac{1}{s}\right)} \Longleftrightarrow H(s) = H_0 \frac{1}{1 + s}$$

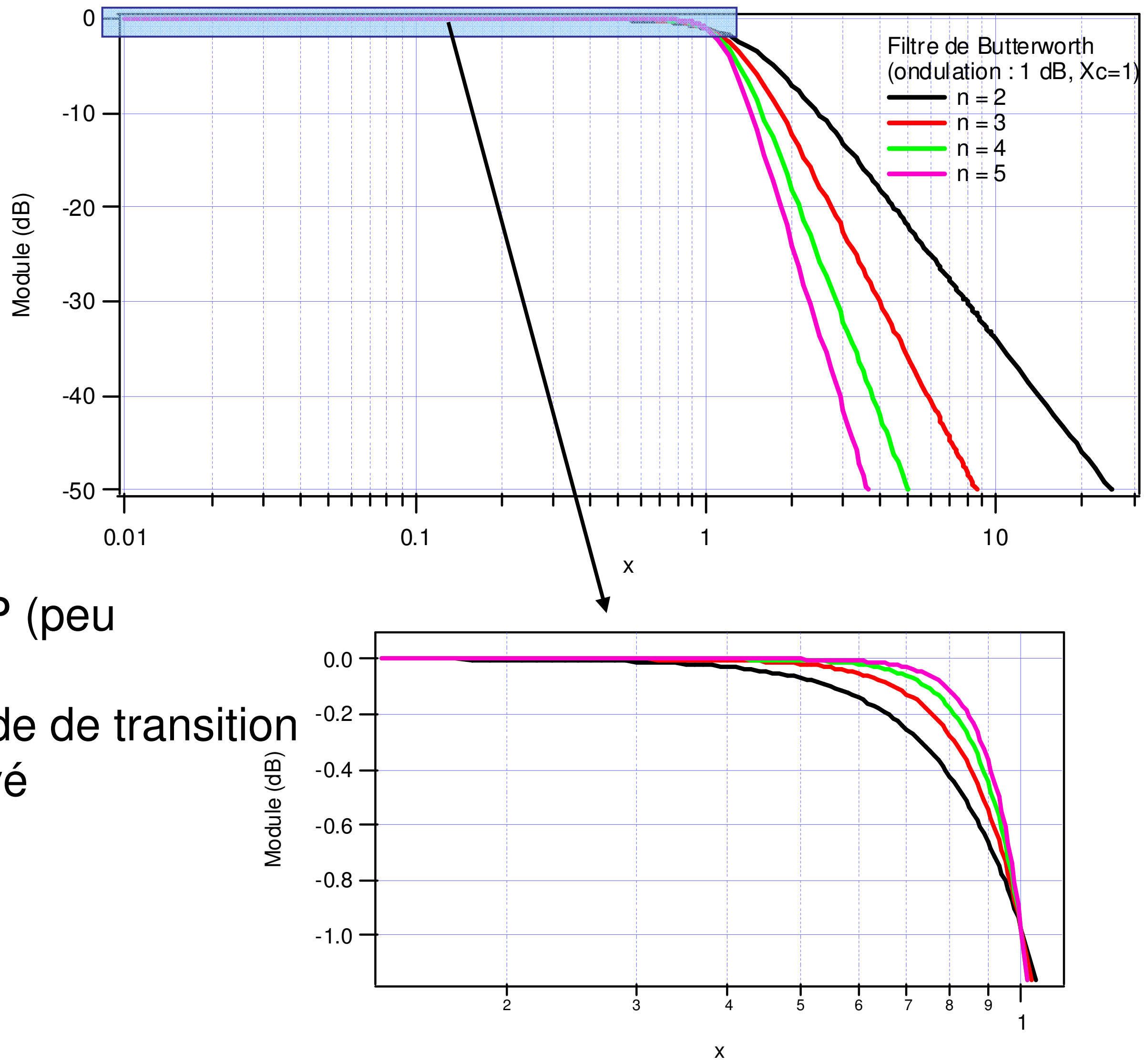
Critères de choix des fonctions de transfert

- ondulation dans la BP, BA ou BT
- raideur dans la BT
- complexité du circuit final et la sensibilité du circuit final à un paramètre
- temps de propagation de groupe dans la BP
- ...

Filtre de Butterworth

$$\left|H(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2\omega^{2n}}$$

ε fixe l'ondulation
n fixe l'ordre du filtre

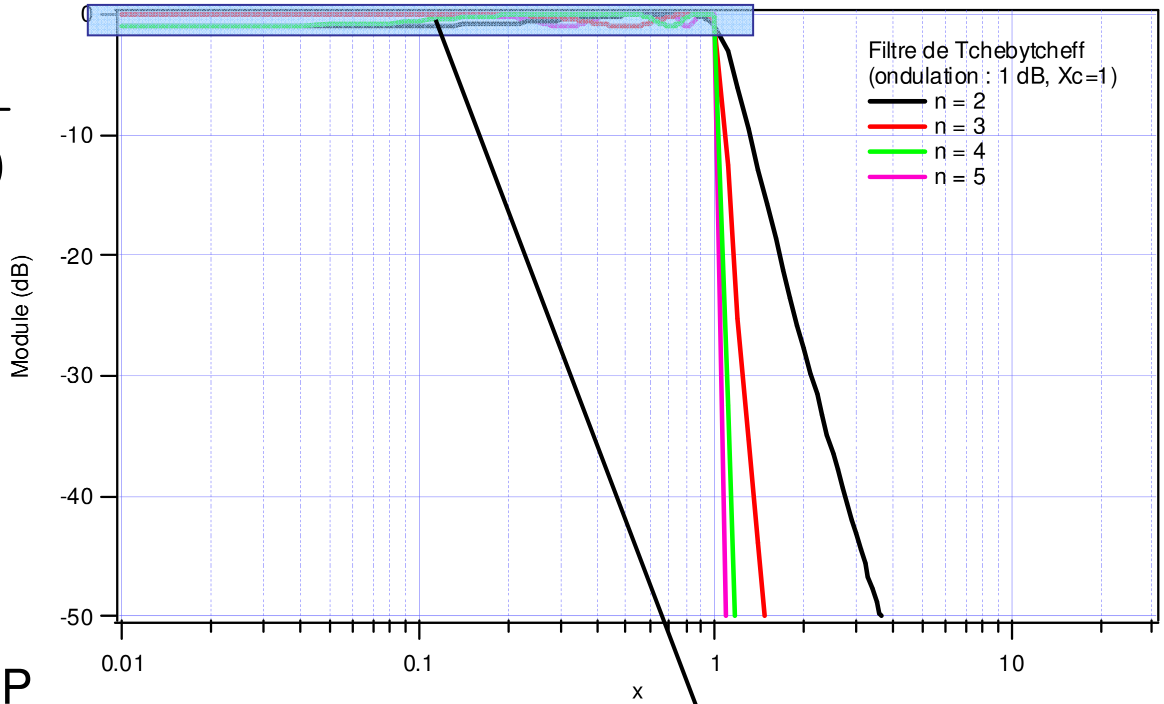


Caractéristiques :
• réponse plate dans la BP (peu d'ondulation)
• pente faible dans la bande de transition
$\Rightarrow$ nécessite un ordre élevé

Filtre de Tchebytcheff

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(\Omega)}$$

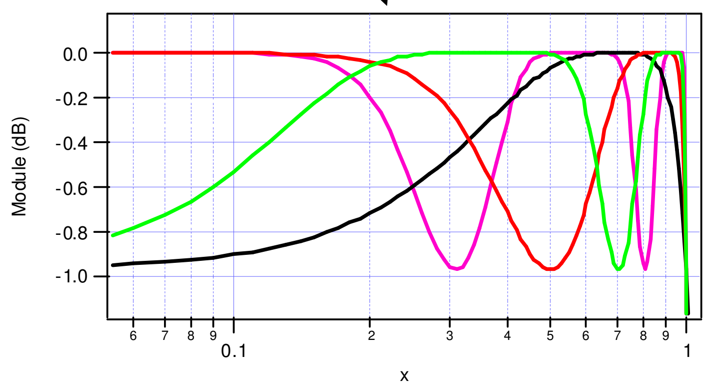
$$\begin{cases} C_{n+1}(\Omega) = 2\,\Omega\,C_n(\Omega) - C_{n-1}(\Omega) \\ C_0(\Omega) = 1 \\ C_1(\Omega) = \Omega \end{cases}$$



Caractéristiques :

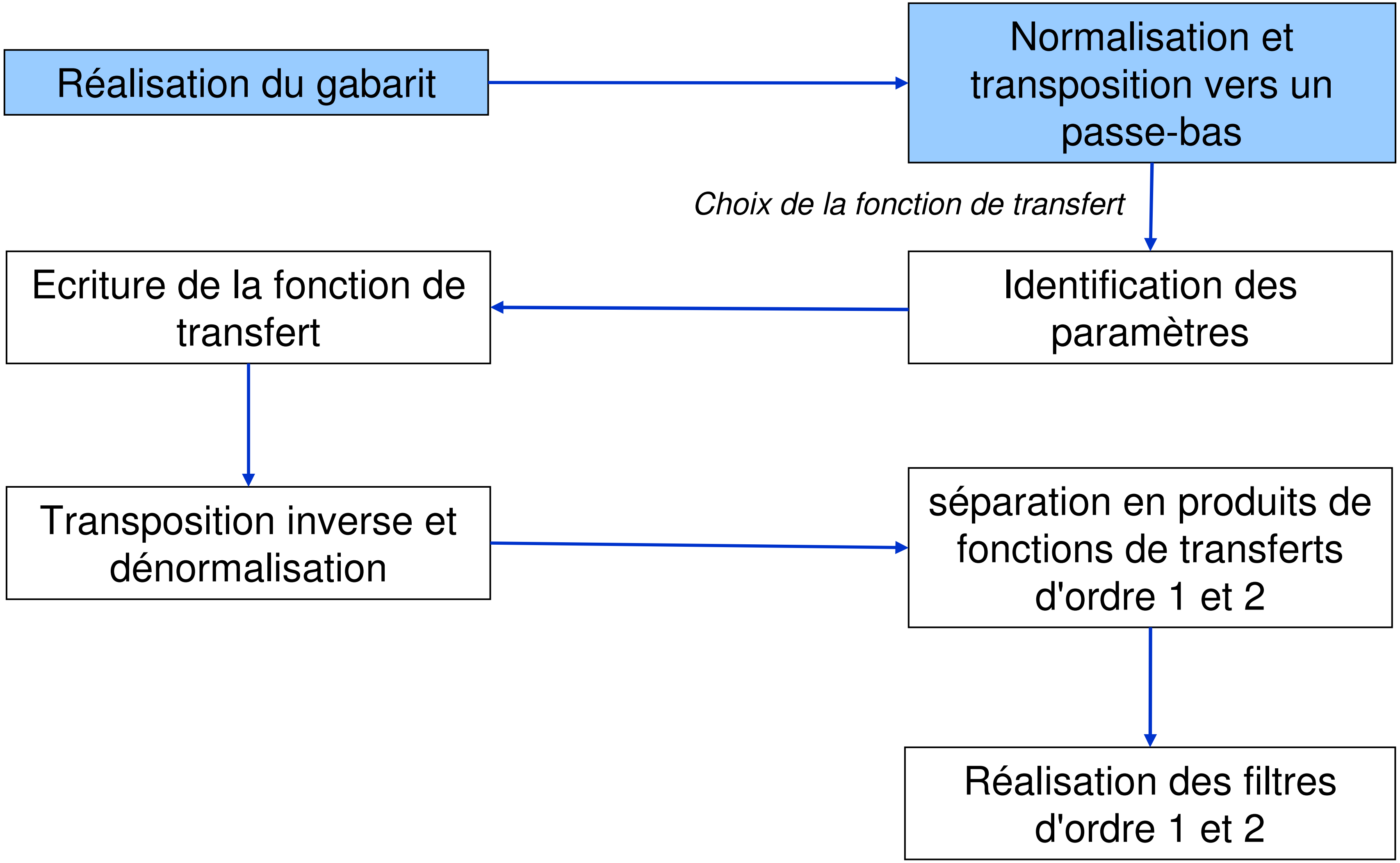
- forte ondulation dans la BP
- pente élevée dans la bande de transition

$\Rightarrow$ nécessite un ordre faible

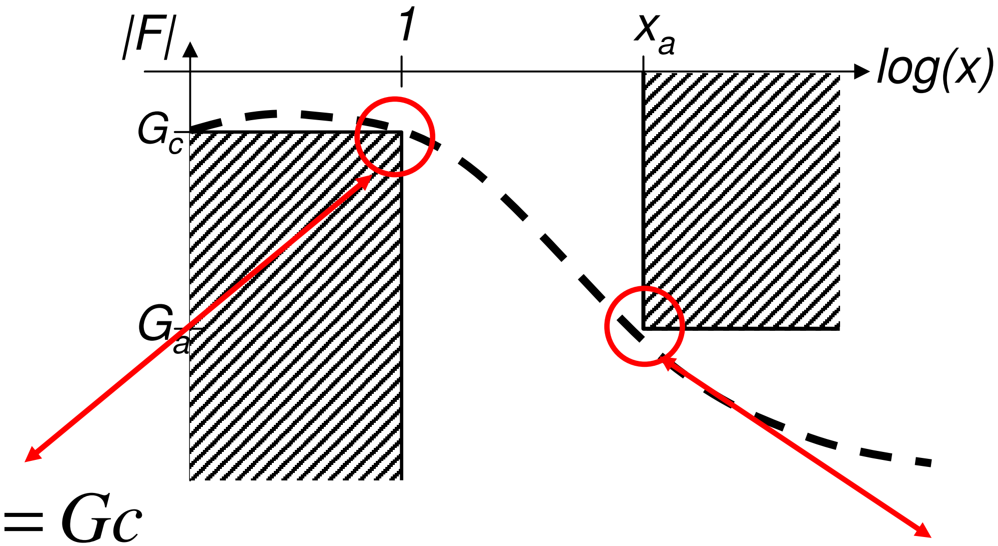


C. Koeniguer 2009

Méthode générale



2 inconnues : 2 équations



$$\left|F(x=1)\right| = Gc$$

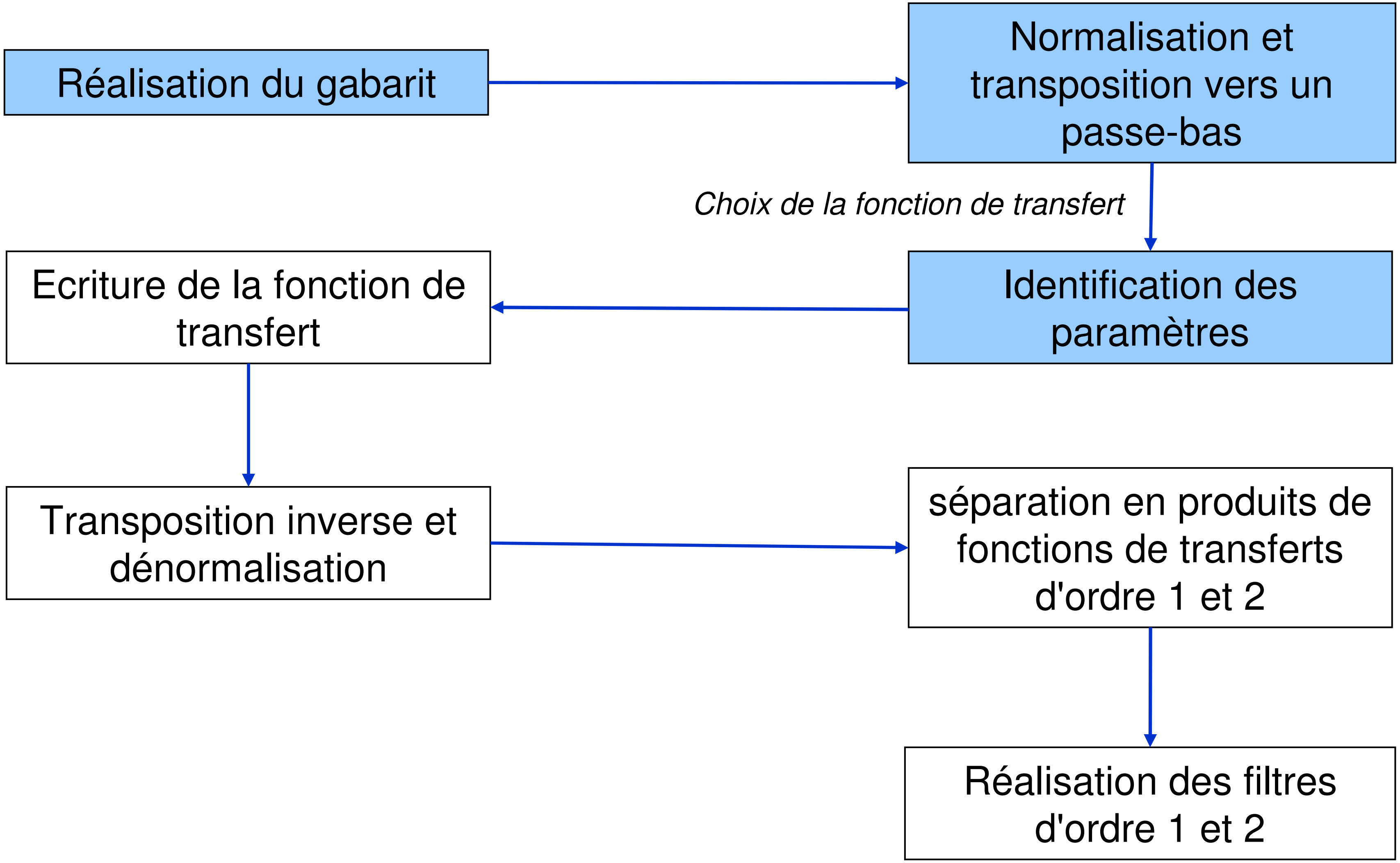
Facteur d'ondulation ε

$$\left|F(x=x_a)\right| < Ga$$

Ordre du filtre normalisé (passe-bas)

C. Koeniguer 2009

Méthode générale



Recherche analytique de la fonction

recherche des zéros, des pôles et du gain statique de la fonction de transfert correspondante :

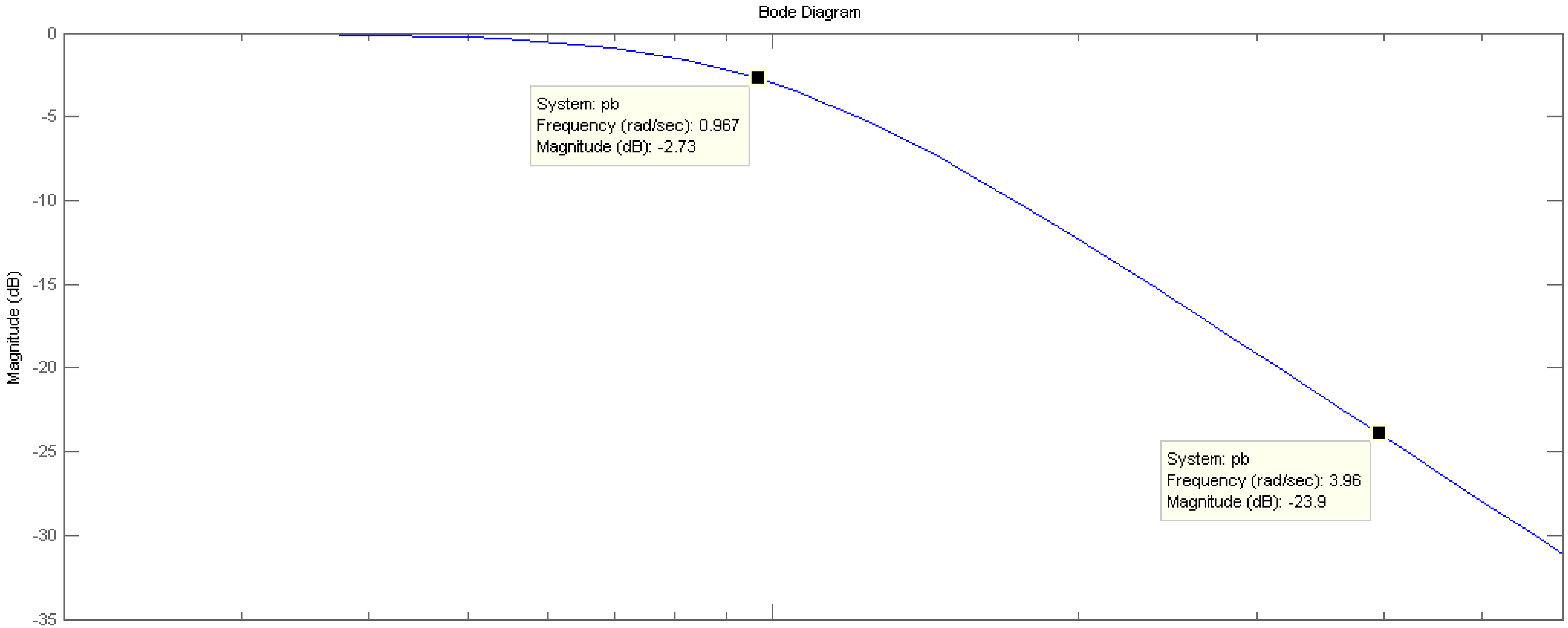
• Dans des tableaux

• En utilisant les fonctions de Matlab (*buttap* pour Butterworth, *cheb1ap* pour Tchebytcheff ....)

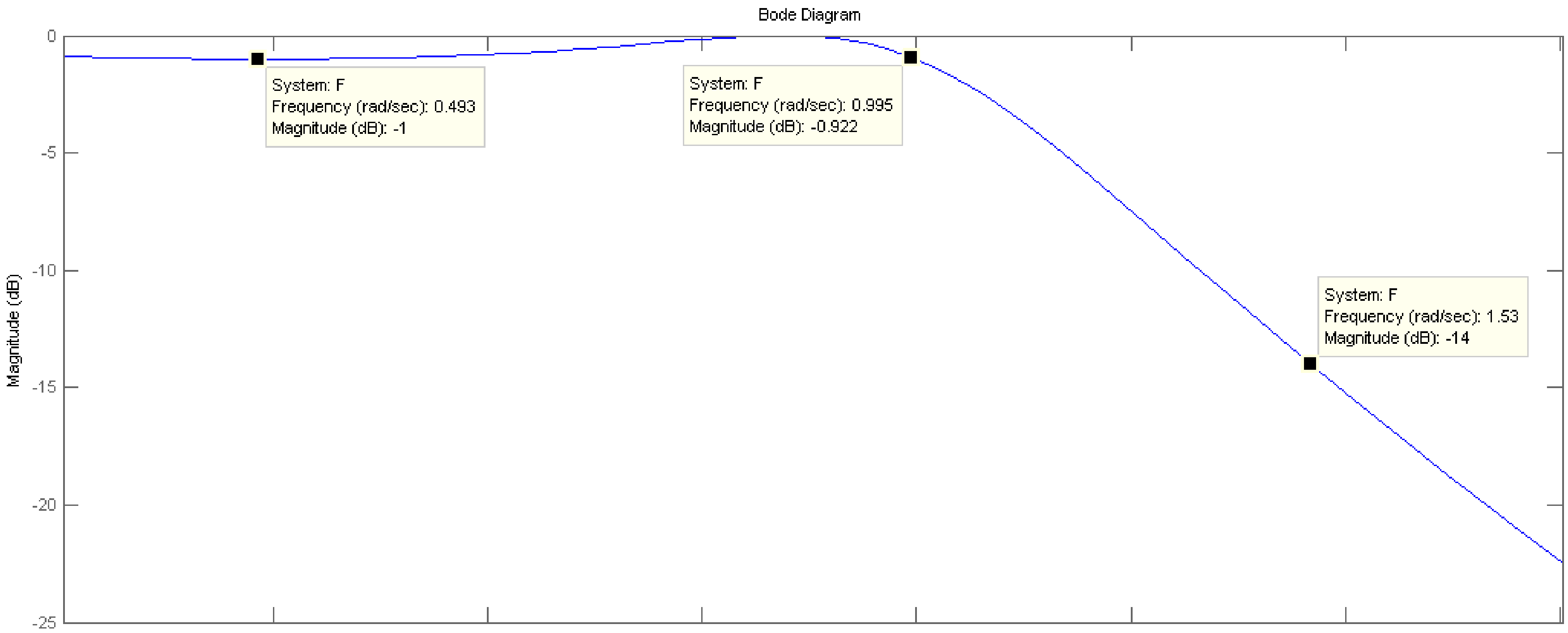
$$F(s) = k\,\frac{(s - s_1^n)(s - s_2^n)\ldots(s - s_N^n)}{(s - s_1^d)(s - s_2^d)\ldots(s - s_M^d)}$$

On peut vérifier à ce stade si la fonction de transfert remplit les conditions !

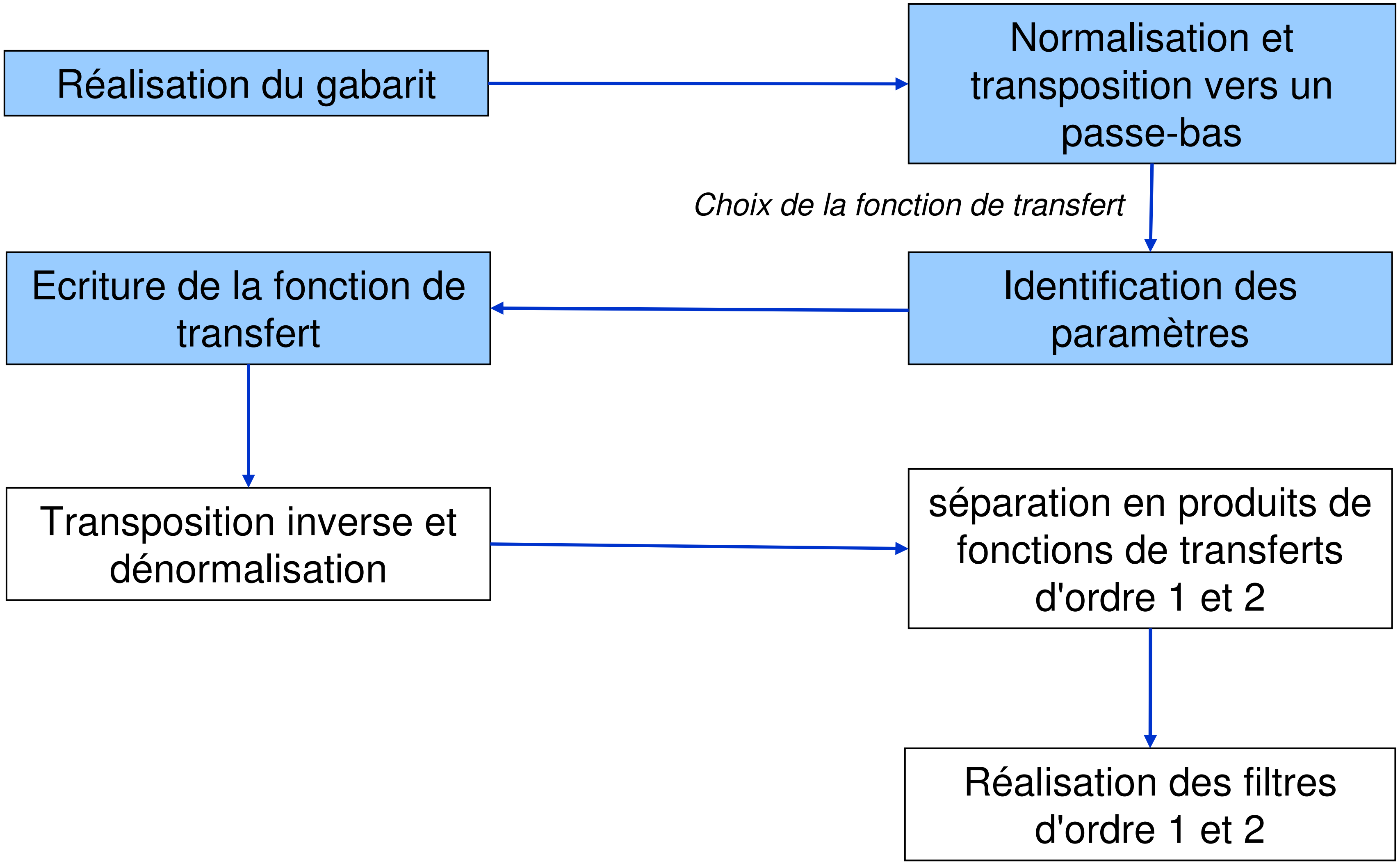
Filtre passe-bas



Filtre passe-bas lié au passe-bande



Méthode générale



Transposition et dénormalisation

Cas d'un passe-bas

Dénormalisation :

$$s = \frac{p}{\omega_0}$$

$$F(s) \Rightarrow F(p)$$

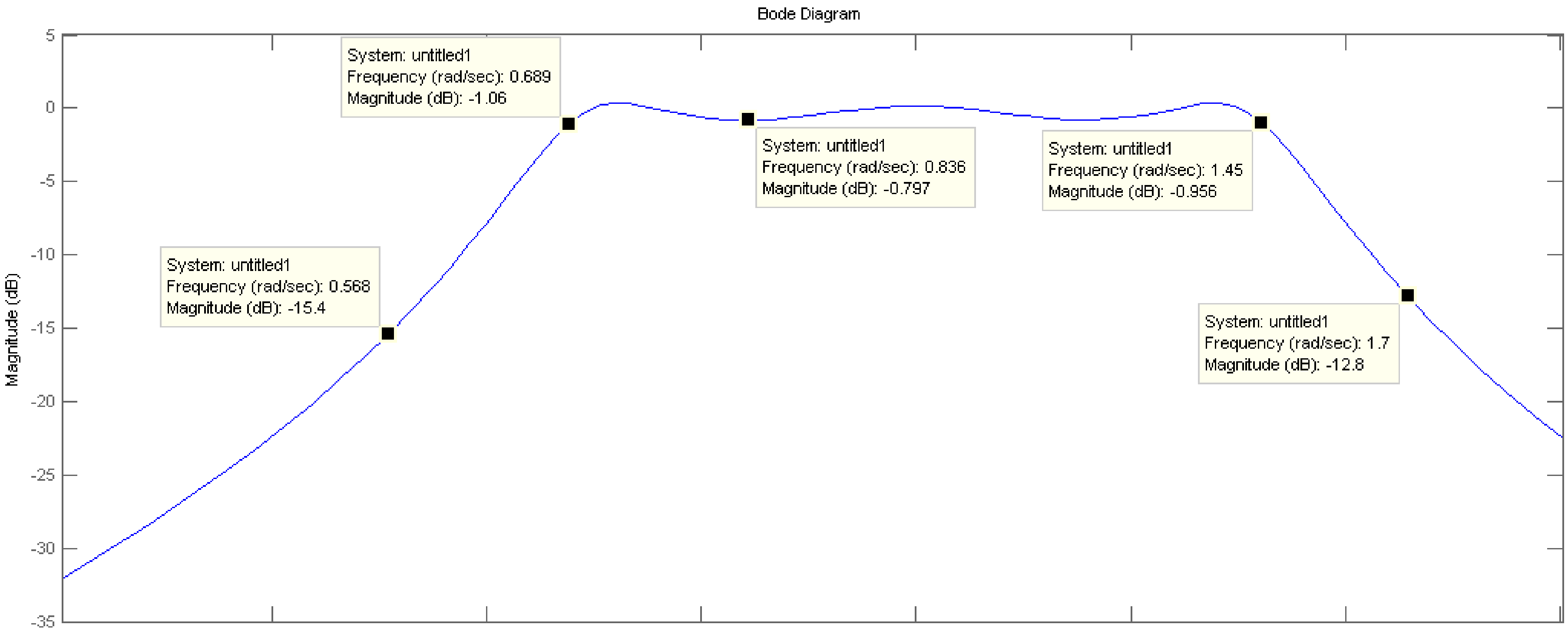
Cas d'un passe-bande ou d'un passe-haut

transposition : $s \leftrightarrow \frac{1}{s}$ ou $s \leftrightarrow \frac{1}{2\sigma}\left(s + \frac{1}{s}\right)$

Si l'ordre obtenu > 2 : recherche des zéros et des pôles pour avoir un produit de fonctions F_i du 1er ou du 2nd ordre

$$F(s) = F_1(s)F_2(s)\dots F_n(s)$$

Filtre passe-bande



Méthode générale