

Chapitre 3

Outils pour l'analyse spectrale

Introduction

On supposera que les signaux sont à spectre borné, compris entre f_{min} et f_{max} , que l'on représentera arbitrairement par le spectre de la figure 3.1. Il existe deux approches théoriques pour l'analyse spectrale : soit on raisonne sur des spectres bilatéraux, c'est à dire en considérant les fréquences positives et négatives (figure 3.1(a)), soit on travaille sur les spectres unilatéraux, ne raisonnant alors que sur les fréquences positives (figure 3.1(b)). Par soucis de simplicité, toutes les études concernant les modulations se feront sur les spectres bilatéraux, la seconde approche nécessitant un formalisme mathématique plus poussé ¹.

Les rappels présents ici dans ce chapitre ne sont pas toujours très corrects mathématiquement.

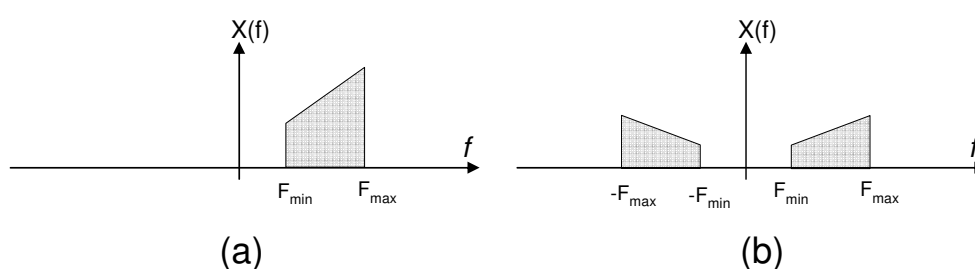


FIG. 3.1 – Représentations du module du spectre : (a) représentation monolatérale ; (b) représentation bilatérale.

Ils suffisent néanmoins aux utilisations liées à ce cours.

¹il s'agit de l'utilisation de la transformée de Hilbert, qui permet de passer d'une représentation bilatérale à monolatérale.

3.1 Rappels sur les distributions

3.1.1 Définition

Si $\delta(f)$ désigne le pic de Dirac en 0, on a la relation suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1 \quad (3.1)$$

L'unité physique de $\delta(x)$ est donc l'inverse de l'unité de x . Par exemple :

- dans le domaine temporel : δ est en Hz (s^{-1})
- dans le domaine fréquentiel : δ est en s

Pour désigner un pic de Dirac centré en $t = t_0$, on peut utiliser la notation :

$$\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0) \quad (3.2)$$

Cette notation permettra, comme on le verra ci-dessous de lever l'ambiguïté du produit de convolution. Remarquons juste que cette notation permet de désigner la fonction "pic de Dirac en t_0 " sans faire intervenir la variable t .

3.1.2 Produit

En ce qui concerne le produit, on a la relation suivante :

$$x(t) \times \delta(t) = x(0) \times \delta(t) \quad (3.3)$$

Remarques :

1. Attention à l'unité de cette relation : l'unité du produit est le produit des unités de x et de δ .
2. Cette relation permet d'en déduire les produits suivants :

$$x(t_0 - t) \delta(t) = x(t_0) \delta(t) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} x(t) \delta(t - t_0) &= x(t) \delta_{t_0}(t) \\ &= x(t_0) \delta_{t_0}(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$x(t_0 - t) \delta(t - t_1) = x(t_0 - t_1) \delta(t - t_1) \quad (3.6)$$

$$(= x(t_0 - t_1) \delta_{t_1}(t))$$

3.1.3 Produit de convolution

Si $*$ désigne le produit de convolution :

$$(x * y)(t) = \int_{\mathbb{R}} x(u) y(t - u) du = \int_{\mathbb{R}} x(t - u) y(u) du \quad (3.7)$$

On rappelle que le pic de Dirac en est l'élément neutre :

$$(x * \delta)(t) = x(t) \quad (3.8)$$

En effet :

$$\begin{aligned} (x * \delta)(t) &= \int_{\mathbb{R}} x(u) \delta(t - u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(t) \delta(t - u) du \\ &= x(t) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \delta(t - u) du}_{=1} \\ &= x(t) \end{aligned}$$

Remarques :

1. L'unité du produit de convolution correspond à l'unité de la fonction elle même.
2. La notation employée dans l'équation 3.7 pour désigner le produit de convolution est généralement remplacée par la notation : $x(t) * \delta(t)$ ou $x * \delta(t)$. Ces deux dernières expressions deviennent ambiguës dans certains cas. Par exemple, elles ne permettent pas de distinguer le produit de convolution de x par δ évalué en $t - t_0$ du produit de convolution de x par δ_{t_0} . En effet : $x(t) * \delta(t - t_0) = (x * \delta)(t - t_0)$ ou $x(t) * \delta(t - t_0) = (x * \delta_{t_0})(t)$? Bien que dans ce cas particulier le résultat soit le même, l'opération initiale n'est pourtant pas la même.

L'équation 3.8 permet d'en déduire les relations suivantes :

$$(x * \delta)(t - t_0) = x(t - t_0) \quad (3.9)$$

$$(x * \delta_{t_0})(t) = x(t - t_0) \quad (3.10)$$

La première relation semble évidente, compte-tenu de la notation. La seconde relation ² mérite quelques détails :

$$\begin{aligned} (x * \delta_{t_0})(t) &= \int_{\mathbb{R}} x(t - u) \delta_{t_0}(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(t - t_0) \delta_{t_0}(u) du \\ &= x(t - t_0) \int_{\mathbb{R}} \delta_{t_0}(u) du \\ &= x(t - t_0) \end{aligned}$$

²remarquons que cette relation, utilisant la notation avec l'indice pour le pic de Dirac translaté et la notation de l'équation 3.7 pour le produit de convolution, ne comporte aucune ambiguïté.

ou encore :

$$\begin{aligned}
(x * \delta_{t_0})(t) &= \int_{\mathbb{R}} x(u) \delta_{t_0}(t - u) du \\
&= \int_{\mathbb{R}} x(u) \delta(t - u - t_0) du \\
&= \int_{\mathbb{R}} x(t - t_0) \delta(t - u - t_0) du \\
&= x(t - t_0) \int_{\mathbb{R}} \delta(t - u - t_0) du \\
&= x(t - t_0)
\end{aligned}$$

3.1.4 Peigne de Dirac

On appelle peigne de Dirac la fonction périodique de période T suivante :

$$\text{III}_T = \sum_n \delta(t - nT) \quad (3.11)$$

On a la propriété suivante :

$$TF [\text{III}_T(t)](f) = \frac{1}{T} \text{III}_{1/T}(f) \quad (3.12)$$

3.2 Rappels sur la transformée de Fourier

3.2.1 Définitions

On notera par une lettre majuscule X , ou par la notation $TF(x)$, la transformée de Fourier associée à une fonction donnée x ($X(f) = TF(t \mapsto x(t))$) :

$$\begin{array}{ccc}
\text{domaine temporel} & & \text{domaine fréquentiel} \\
x(t) & \leftrightarrow & X(f)
\end{array}$$

On définit la transformée de Fourier ³ X du signal x :

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.13)$$

et la transformée de Fourier inverse :

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (3.14)$$

Notons ici que $X(0)$ correspond à la valeur moyenne du signal x .

³sous réserve de l'existence de l'intégrale bien sûr

3.2.2 Transformées de Fourier usuelles

Fonctions usuelles

On ne rappelle ici que la Transformée de Fourier du cosinus (celle du sinus étant identique en ce qui concerne le module) :

$$TF(t \mapsto \cos(2\pi f_0 t))(f) = \frac{1}{2}\delta_{-f_0}(f) + \frac{1}{2}\delta_{f_0}(f)$$

Le spectre est donc constitué de deux raies (d'amplitude $\frac{1}{2}$) centrées en $-f_0$ et $+f_0$.

Distributions

On a les relations suivantes :

$$TF[\delta(x)](y) = 1 \quad (3.15)$$

$$TF^{-1}[\delta(x)](y) = 1 \quad (3.16)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \delta(x) e^{\pm j2\pi xy} dx &= \int_{\mathbb{R}} \delta(x) e^0 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

On en conclut donc que : $TF[x \mapsto 1](y) = \delta(y)$.

Et donc :

$$TF[x \mapsto e^{j2\pi y_0 x}](y) = \delta(y - y_0) \quad (3.17)$$

d'après les propriétés de la transformée de Fourier (ou en calculant directement) :

$$\begin{aligned} TF^{-1}[y \mapsto \delta(y - y_0)](x) &= \int_{\mathbb{R}} \delta(y - y_0) e^{-j2\pi xy} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \delta(u) e^{-j2\pi x(u+y_0)} du \text{ en posant : } u = y - y_0 \\ &= e^{j2\pi xy_0} \int_{\mathbb{R}} \delta(u) e^{-j2\pi xu} du \\ &= e^{j2\pi xy_0} \int_{\mathbb{R}} \delta(u) du \\ &= e^{j2\pi xy_0} \end{aligned}$$

Puis, en passant à la transformée de Fourier inverse, on obtient le résultat. Ce résultat permet de retrouver la transformée de Fourier du cosinus, en écrivant le cosinus sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes.

3.2.3 Opérations élémentaires et propriétés

On a les deux relations suivantes :

$$TF [t \mapsto x(t)e^{j2\pi f_0 t}] (f) = X(f - f_0) \quad (= TF[t \mapsto x(t)](f - f_0)) \quad (3.18)$$

$$TF [t \mapsto x(t - \tau)] (f) = X(f)e^{-j2\pi \tau f} \quad (3.19)$$

Les démonstrations de ces formules de translation se font facilement en effectuant dans les intégrales un changement de variable. On a également des relations analogues pour la transformée de Fourier inverse :

$$TF^{-1} [f \mapsto X(f)e^{j2\pi f t_0}] (t) = x(t + t_0) \quad (= TF^{-1}[X(f)](t + t_0)) \quad (3.20)$$

$$TF^{-1} [f \mapsto X(f - f_0)] (t) = x(t)e^{j2\pi f_0 t} \quad (3.21)$$

La transformée de Fourier a les propriétés suivantes :

- Si x est une fonction réelle et paire, alors : X est réelle et paire
- Si x est une fonction réelle et impaire, alors : X est imaginaire pure et impaire
- Si x est une fonction réelle, alors : X est à symétrie hermitienne, ie : $X(-f) = X(f)^*$, où $*$ désigne le complexe conjugué. Cette propriété permet en particulier d'écrire que : $|X(-f)| = |X(f)|$. Les spectres de fonctions réelles sont donc symétriques.

3.2.4 Théorème de Parseval

Le théorème de Parseval lié aux séries de Fourier se généralise au cas de la transformée de Fourier :

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |G(f)|^2 df \quad (3.22)$$

3.2.5 TF et produit de convolution

On a les propriétés générales suivantes :

domaine temporel		domaine fréquentiel
produit		convolution
$x(t) \times y(t)$	$\leftrightarrow$	$[X * Y](f)$
convolution		produit
$[x * y](t)$	$\leftrightarrow$	$X(f) \times Y(f)$

Ces relations permettent de retrouver la propriété de translation de la TF :

$$\begin{aligned}
 TF [t \mapsto x(t)e^{j2\pi f_0 t}] (f) &= (TF [t \mapsto x(t)] * TF [t \mapsto e^{j2\pi f_0 t}]) (f) \\
 &= (X * \delta_{f_0}) (f) \\
 &= X(f - f_0)
 \end{aligned}$$

On peut aussi en déduire l'effet sur le spectre d'une multiplication temporelle d'un signal x par un cosinus, soit en écrivant un cosinus sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes et en utilisant la propriété ci-dessus, soit en écrivant que la TF d'un cosinus est la somme de deux pics de Dirac :

$$\begin{aligned}
 TF[t \mapsto x(t) \times \cos(2\pi f_0 t)](f) &= (TF[t \mapsto x(t)] * TF[t \mapsto \cos(2\pi f_0 t)])(f) \\
 &= \left(X * \frac{\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}}{2} \right)(f) \\
 &= \frac{(X * \delta_{f_0})(f) + (X * \delta_{-f_0})(f)}{2} \\
 &= \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}
 \end{aligned}$$

Ainsi, le spectre de x est translaté autour des fréquences $-f_0$ et $+f_0$ (figure 3.2). Ce résultat est important car il est à la base du principe des modulations, qui consistent à translater en fréquence le spectre des signaux à transmettre. On verra que cette étape de multiplication est le principe le plus simple des modulations : il s'agit de la modulation d'amplitude. Enfin, on peut montrer les relations suivantes :

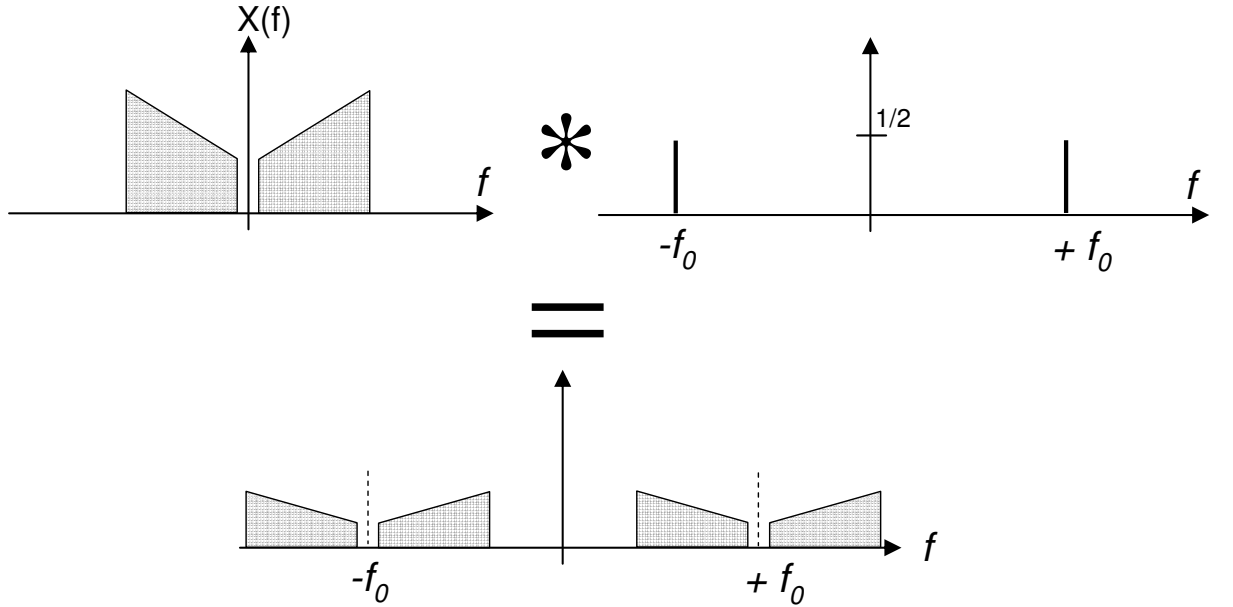


FIG. 3.2 – Spectre d'un signal x multiplié par un cosinus : le spectre de x est translaté autour du raies du spectre du cosinus.

$$\left(TF \left[\frac{d^n x}{dt^n} \right] \right) = (j2\pi f)^n TF[x](f) \quad (3.23)$$

$$TF \left[\int x(u) du \right] (f) = \frac{1}{j2\pi f} TF[x](f) \quad (3.24)$$