Chapitre 1

Filtrage analogique

1.1 Présentation de la synthèse

1.1.1 Position du problème

Nous ne traiterons dans ce chapitre que la synthèse de filtres analogiques. Cette opération de synthèse est identique à celle utilisée dans la synthèse de filtres numériques, justifiant ainsi l'importance de cette étude.
Les opérations de filtrage vues jusqu'à présent consistaient à utiliser des filtres d'ordre 1 ou 2 et à ajuster "manuellement" la fréquence de coupure du filtre à la fréquence de coupure souhaitée. Cet ajustement, facile à faire pour un ordre 1 ou 2, devient difficile voire impossible à effectuer pour des ordres plus élevés, lorsque l'on cascade des filtres. Dans de tels cas, il faut alors adopter une démarche inverse : on part d'un cahier des charges, imposant une ou plusieurs fréquences de coupure associées à des atténuations minimales, définissant ce qu'on appelle un gabarit, puis on essaye mathématiquement de trouver une fonction de transfert qui permette de satisfaire ce cahier des charges. Il faut remarquer ici que le filtrage idéal n'existant pas (on ne sait pas réaliser des filtres rectangulaires parfait), il faut dans le cahier des charges indiquer un gain en dessous duquel le signal devient négligeable et assimilé au signal coupé c'est à dire à la valeur nulle.

1.1.2 Notion de gabarit

Nous allons nous limiter à un gabarit concernant l'étude du module d'une fonction de transfert, la phase étant dans de nombreuses applications moins importante que le module. Réaliser un gabarit consiste à délimiter sur un diagramme de bode (en amplitude) les zones permises et non autorisées pour une fonction de transfert satisfaisant un cahier des charges donné. Un gabarit fait ainsi intervenir plusieurs fréquences et plusieurs gains caractéristiques. La figure 1.1 représente un exemple de gabarit pour un filtre passe-bas, ce gabarit étant le plus simple [1] (pour un passe-bas).

[1] excepté si on n'a aucune contrainte sur la pente

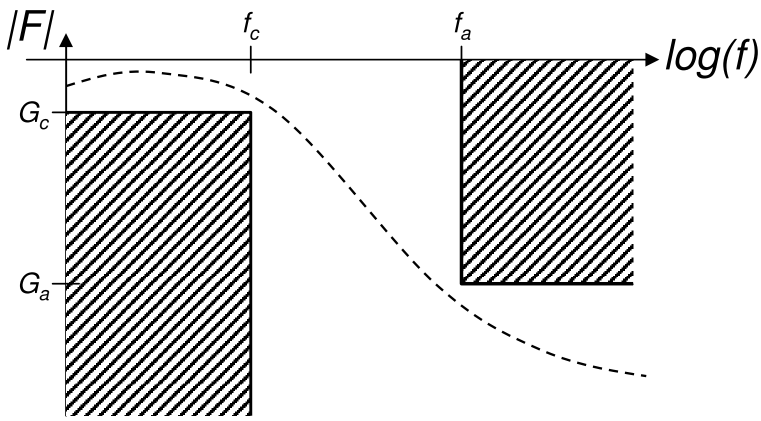


FIG. 1.1 – Exemple de gabarit d'un filtre passe-bas. La courbe en pointillé est un exemple de fonction de transfert satisfaisant ce gabarit

Ce gabarit fait apparaître : une fréquence de coupure [2] f_c et une fréquence plus élevée : f_a. A ces fréquence correspondent des gains : G_c et G_a, qui sont les gains minimaux que doit avoir la fonction de transfert aux fréquences correspondantes. Le but de la synthèse est de trouver une fonction de transfert F (par exemple en pointillé sur la courbe) dont le module reste dans les zones autorisées :

Pour $f \leq f_c$: $\mid F(jf) \mid > G_c$
Pour $f \geq f_a$: $\mid F(jf) \mid < G_a$

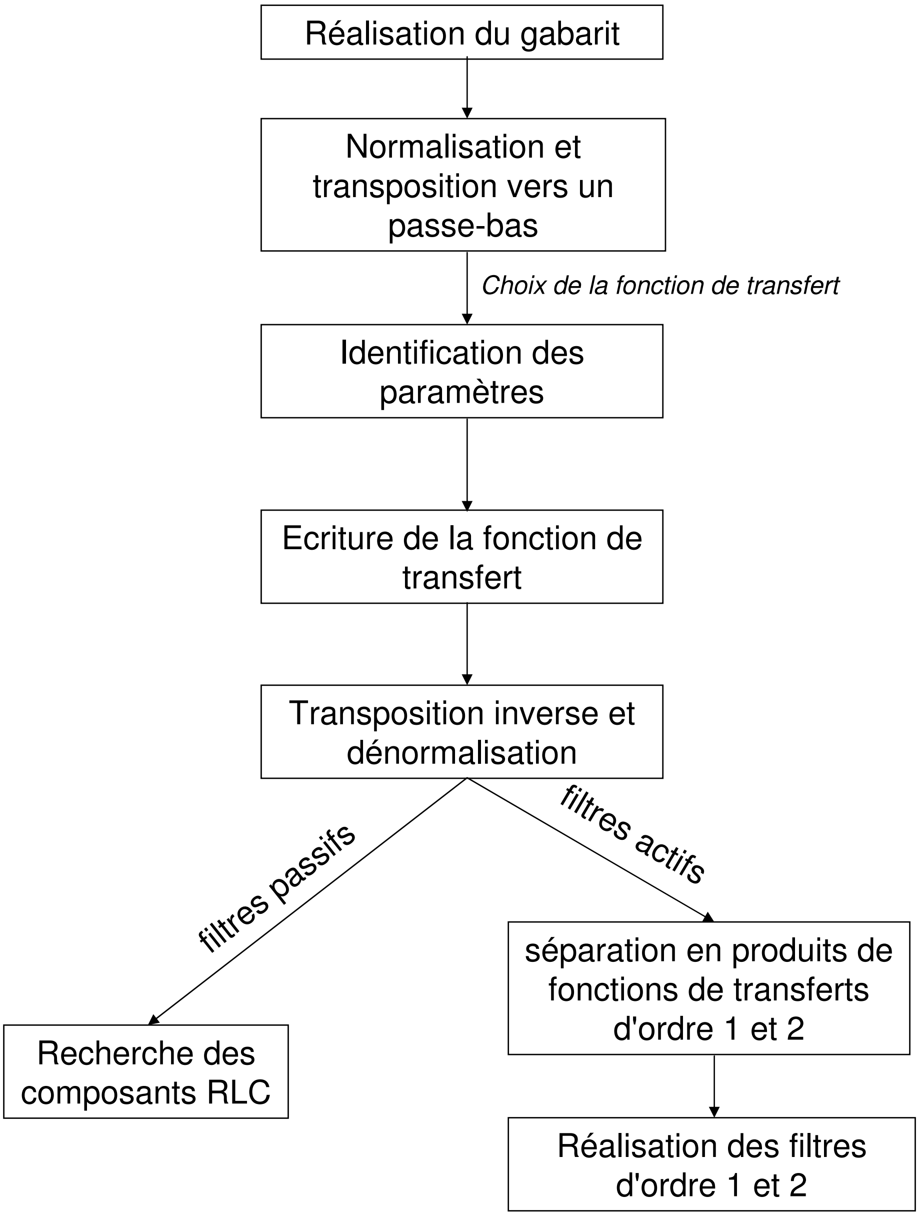
Il faut donc trouver une fonction mathématique dont le module vérifie ces conditions.
Ce gabarit fait apparaître 3 bandes de fréquence :
$[0, f_c]$: bande passante (BP)
$[f_c, f_a]$: bande de transition (BT)
$[f_a, +\infty]$: bande atténuée ou bande coupée (BC)

Ce gabarit passe-bas est important, car nous montrerons ultérieurement que l'on peut toujours se ramener à filtre passe-bas par une transformation appropriée.
Remarque : selon le cahier des charges, on peut avoir des gabarits comportant plus de fréquences caractéristiques et plusieurs bandes atténuées. Nous ne les développerons pas dans ce polycopié, par soucis de simplicité.

[2]cette fréquence de coupure n'est pas forcément la fréquence de coupure à $-3\ dB$.

1.1.3 Les étapes de la synthèse

Nous allons présenter ici les différentes étapes permettant d'aboutir à la réalisation des filtres analogique. Nous détaillerons ces étapes dans les paragraphes suivants.



Nous allons détailler dans le paragraphe suivant les différentes étapes de la synthèse. Nous prendrons deux exemples afin d'illustrer la méthode : l'exemple d'un filtre passe-bas et celui d'un passe-bande, dont les cahiers des charges sont les suivants :

- filtre passe-bas : nous souhaitons réaliser un filtre passe-bas ayant une fréquence de coupure à -3 dB de 2 kHz et une atténuation minimale de 20 dB à 8 kHz.
- filtre passe-bande : nous souhaitons réaliser un filtre passe-bande ayant une bande passante comprise entre 300 et 625 Hz, caractérisée par une atténuation maximale de 1 dB, et dont les atténuations minimales à 250 Hz et 750 Hz sont de 10 dB.

1.2 Détail des différentes étapes

1.2.1 Gabarit

La première étape consiste à réaliser le gabarit à partir du cahier des charges. Afin de simplifier la réalisation, il faut prendre en compte les plus fortes contraintes. Remarquons également que les gabarits des filtres passe-bande doivent être symétriques. Si tel n'est pas le cas, il faut rendre le gabarit symétrique en prenant la ou les conditions les plus fortes.
La figure 1.2 présente, en haut, les gabarits associés aux deux exemples. On rappelle, pour le cas du passe-bande, que la fréquence centrale en échelle logarithmique (diagrammme de Bode) est définit par la racine carrée du produit (moyenne géométrique) : $f_c = \sqrt{300 \times 625} = 433$.

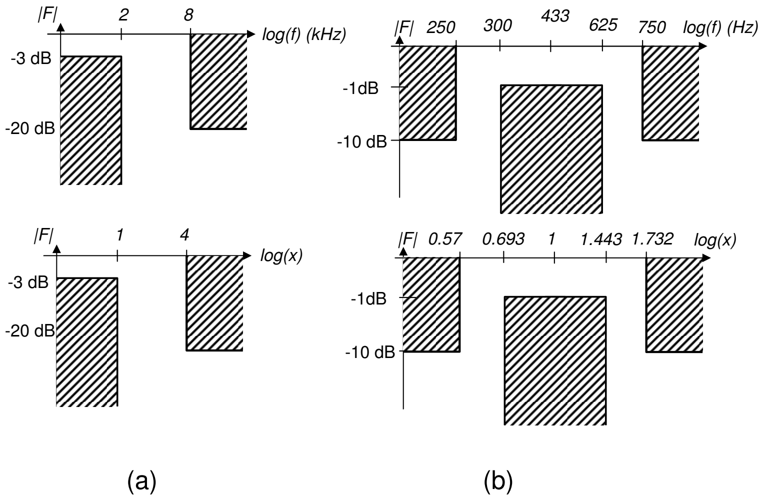


FIG. 1.2 – Gabarits en fréquence (en haut) et normalisés (en bas) pour les exemples du passe-bas (a) et du passe-bande (b).

1.2.2 Normalisation et transposition

Normalisation

La méthode de synthèse exposée ici nécessite de travailler sur un gabarit normalisé, c'est à dire dont la fréquence caractéristique vaut 1. Voici les différentes règles de normalisation :

- Pour un passe-bas ou un passe-haut, il faut diviser les fréquences par la fréquence de coupure : $x = f/f_c$ (figures 1.3(a) et (b))
- Pour un passe-bande, il faut diviser par la fréquence centrale f_c de la bande passante : $x = f/f_c$ (figure 1.3(c)), avec $f_c = \sqrt{f_{c1} \times f_{c2}}$.

Les gabarits normalisés des deux exemples sont représentés sur les figures du bas de la figure 1.2.

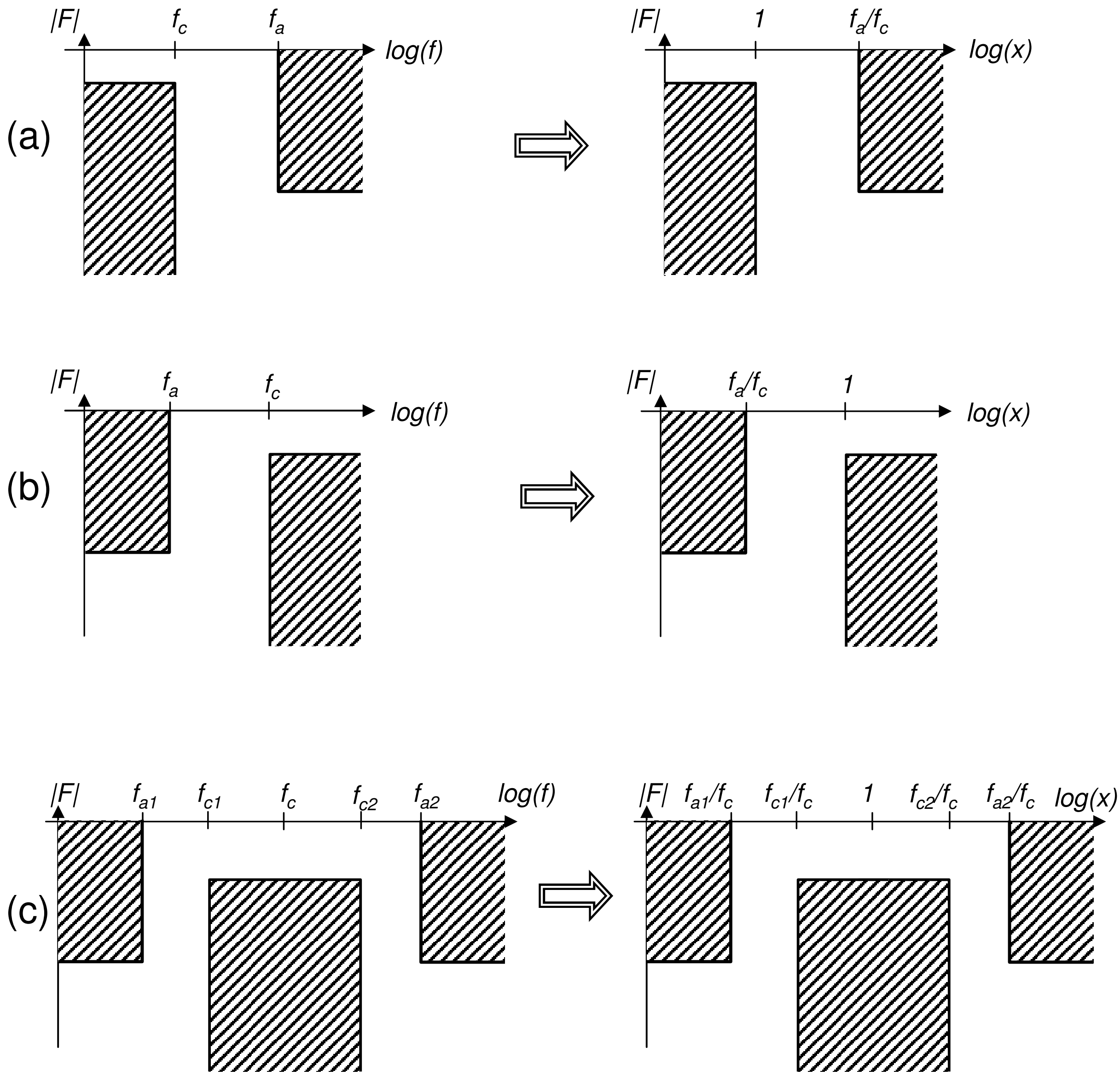


FIG. 1.3 – Normalisation des gabarit : (a) d'un passe-bas ; (b) d'un passe-haut ; (c) d'un passe-bande

Transposition passe-haut/passe-bas

Si le filtre que l'on doit synthétiser n'est pas un filtre passe-bas, il faut se ramener à un filtre passe-bas (normalisé) par des transformations mathématiques adaptées. Considérons la fonction de transfert correspondant à un passe-haut normalisé d'ordre 1 :

$$H(s) = H_0 \frac{s}{1+s} \tag{1.1}$$

avec $s = jx$. Si on effectue le changement de variable $s' = 1/s$, cette fonction devient :

$$H(s') = H_0 \frac{1}{1+s'} \tag{1.2}$$

ce qui correspond à la fonction de transfert d'un filtre passe-bas. On admettra la généralisation à des ordres plus élevés. Ainsi, on tranpose un passe-haut en un passe-bas, et réciproquement, à l'aide de la transformation :

$$\text{Passe-haut} \quad \leftrightarrow \quad \text{Passe-bas} \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{s} \quad \leftrightarrow \quad s \tag{1.4}$$

Transposition passe-bande/passe-bas

Considérons la fonction de transfert correspondant à un passe-bande normalisé :

$$H(s) = H_0 \frac{2\sigma s}{1 + 2\sigma s + s^2} \tag{1.5}$$

où 2σ correspond à la bande passante normalisée (définit par :$(f_{c2} - f_{c1})/f_c$). Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = H_0 \frac{2\sigma}{\frac{1}{s} + 2\sigma + s} \tag{1.6}$$

$$= H_0 \frac{1}{1 + \frac{1}{2\sigma}\left(\frac{1}{s} + s\right)} \tag{1.7}$$

En effectuant la transformation suivante : $s' = \frac{1}{2\sigma}\left(s + \frac{1}{s}\right)$, on obtient la fonction de transfert :

$$H(s') = H_0 \frac{1}{1 + s'} \tag{1.8}$$

ce qui est bien un passe-bas. Ainsi, on tranpose un passe-bande en un passe-bas, et réciproquement, à l'aide de la transformation :

$$\text{Passe-bande} \quad \leftrightarrow \quad \text{Passe-bas} \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{2\sigma}\left(s + \frac{1}{s}\right) \quad \leftrightarrow \quad s \tag{1.10}$$

Remarque : pour le calcul des fréquences, il faut faire attention au signe. En effet, $s = jx$ et $s' = jx'$. Ainsi la transformation s'écrit :

$$jx' = \frac{1}{2\sigma}\left(jx + \frac{1}{jx}\right) \tag{1.11}$$

$$x' = \frac{1}{2\sigma}\left(x - \frac{1}{x}\right) \tag{1.12}$$

Ainsi, pour le passe-bande pris en exemple, pour lequel la bande passante vaut $2\sigma = 1.443 - 0.693 = 0.75$, on obtient les fréquences normalisées suivantes (cf figure1.4 :

$$\begin{array}{ccc} Passe-bande & & Passe-bas \\ 1 & \leftrightarrow & 0 \\ 1.443 & \leftrightarrow & 1 \\ 1.732 & \leftrightarrow & 1.54 \end{array}$$

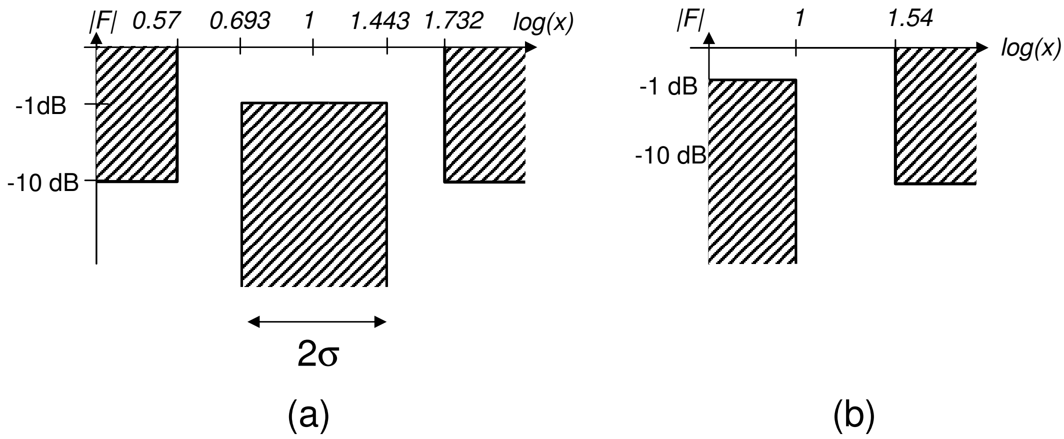


FIG. 1.4 – Exemple de transposition du passe-bande vers un passe-bas.

1.2.3 Détermination de la fonction de transfert

Les critères de choix

Nous allons voir dans la suite qu'il existe différentes fonctions mathématiques permettant de satisfaire le gabarit. Ces différentes fonctions ont des caractéristiques différentes. Il faudra pourtant, lors d'une synthèse de filtre, en choisir une. Plusieurs critères peuvent influencer le choix d'une fonction particulière :

- l'ondulation dans la bande passante. Selon la fonction choisie, il peut y avoir plus ou moins d'ondulation dans la "bande passante", ce qui peut être gênant selon l'application.
- raideur de la pente dans la bande de transition [3].
- complexité du circuit final, lié au choix de la fonction.
- variation du temps de propagation de groupe et de la phase [4]. Par exemple, un filtre dans l'audio ne devra pas déformer le signal que l'on devra transmettre

[3] Il ne faut pas confondre raideur de la pente et pente asymptotique. Pour un gabarit donné, la pente asymptotique sera identique à toutes les fonctions. En revanche, le diagramme réel se rapprochera plus ou moins de l'asymptote selon la fonction.

[4] On rappelle que le temps de propagation de groupe est définit par : $\tau_g = -\frac{d\varphi}{d\omega}$

(dans la bande passante). Seul un retard sera donc autorisé dans la bande passante. La réponse temporelle d'un tel filtre devra donc être de la forme : $y(t) \propto x(t-\tau)$, avec τ constant, x étant le signal d'entrée. Ceci imposera donc un temps de groupe constant et donc une phase linéaire.
- sensibilité du filtre à un paramètre. Certaines réalisations pratiques sont plus sensibles que d'autres aux composants. Si un des critères est la stabilité ou la reproductibilité, il faudra veiller à ce que la dépendance des caractéristiques du filtre aux composants soit la plus faible possible. Pour quantifier cette dépendance, on définit la sensibilité s du paramètre P en fonction du composant Z par la relation : $s = \frac{\partial P/P}{\partial Z/Z}$. Si par exemple un filtre a un facteur de qualité relié à deux résistances par la relation : $Q = \sqrt{R_1/R_2}$, la sensibilité de Q vis à vis de R_1 s'écrit : $s = \frac{\partial Q/Q}{\partial R_1/R_1} = \frac{\partial Q}{\partial R_1}\frac{R_1}{Q} = 0.5$

Les différentes fonctions de transfert

Toutes les fonctions énoncées ici sont disponibles sous Matlab : il existe en outre des fonctions pour lesquelles on précise le gabarit et Matlab retourne les caractéristiques de ces fonctions (ordre, coefficients caractéristiques). Il ne faut pas oublier que l'aide de Matlab explique de manière très pédagogique ces fonctions. Nous allons donner les fonctions essentielles ... il ne faut pas oublier qu'il en existe un très grand nombre.

Filtre de Butterworth Le module de la fonction de transfert se met sous la forme :

$$||F(j\omega)||^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2\omega^{2n}} \tag{1.13}$$

	ε	:	définit l'ondulation dans la bande passante
où :	n	:	définit l'ordre du filtre (si $\omega \to \infty$, la pente de T est équivalente à $-20 \times n\ dB/dec$)

Ces deux paramètres se déterminent analytiquement à l'aide du gabarit (sur lequel on a des points connus), ou numériquement à l'aide de Matlab.
Caractéristiques essentielles d'un filtre de Butterworth (cf figure 1.5) :

- faible ondulation dans la bande passante
- pente faible dans la bande de transition, nécessitant souvent un ordre élevé

Filtre de Tchebychev Remarque : il existe de nombreuses orthographes de ce nom : Chebyshew, Chebychev, Chebycheff etc ...
<u>Filtre de type I :</u>
Le module de la fonction de transfert se met sous la forme :

$$||F(j\omega)||^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega)} \tag{1.14}$$

Avec :

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_{n+1}(\omega) &=& 2\omega C_n(\omega) - C_{n-1}(\omega) \\ C_0(\omega) &=& 1 \\ C_1(\omega) &=& \omega \end{array}\right.$$

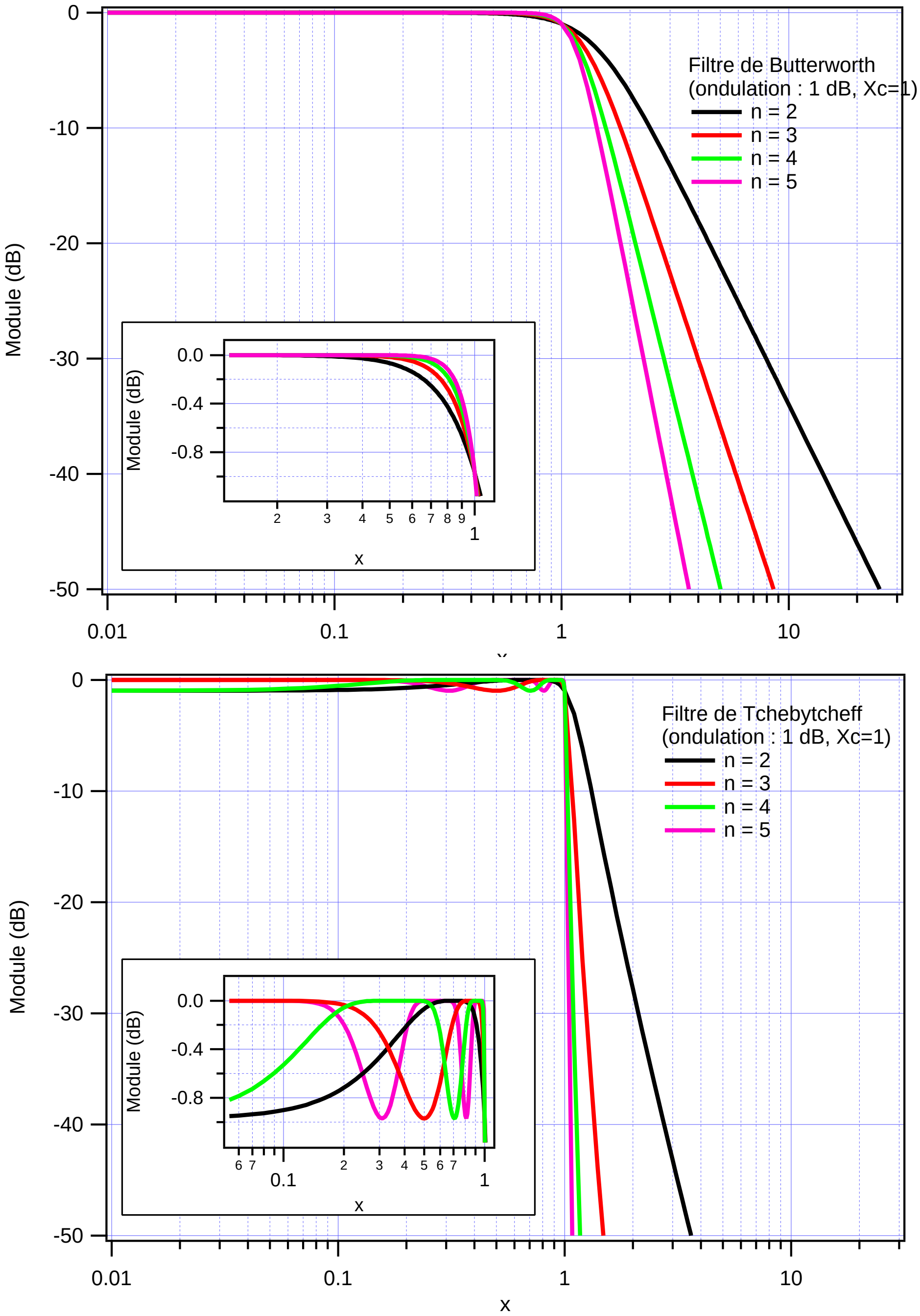


Fig. 1.5 – Diagrammes de Bode de filtres de Butterworth et de Tchebychev

ou :

$$\begin{cases} \omega < 1 & : \quad C_n(\omega) = \cos(n \arccos \omega) \\ \omega \geq 1 & : \quad C_n(\omega) = \mathrm{ch}(n \arccos \omega) \end{cases}$$

On peut montrer que : $C_n(\omega) \underset{\omega \to \infty}{\sim} \omega^n$. On en déduit la pente : $-20 \times n\ dB/dec$.
Caractéristiques (cf figure 1.5) :

- ondulation importante dans la bande passante
- pente plus raide que le filtre de Butterworth dans la bande de transition

Pour un ordre faible, il est donc plus facile de satisfaire le gabarit avec un tel filtre qu'avec un filtre de Butterworth, au prix d'une ondulation plus importante dans la bande passante.

Filtre de type II, ou Tchebytchev inverse

Les deux précédents filtres étaient caractérisés par une phase non linéaire. Le filtre de type II va améliorer cet aspect. Le module de la fonction de transfert se met sous la forme :

$$||F(j\omega)||^2 = \frac{\varepsilon^2 C_n^2(1/\omega)}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(1/\omega)} \tag{1.15}$$

Caractéristiques(cf figure 1.6) :

- réponse assez plate dans la bande passante
- phase relativement linéaire(par morceaux)
- pente raide dans la bande de transition
- ondulation dans la bande coupée

Les autres filtres Les expressions des autres filtres sont plus compliquées. Parmi la quantité de fonctions existantes, citons :

- filtre de Bessel, qui possède une phase très linéaire dans la bande passante [5]
- filtre de Cauer ou filtre elliptique, qui possède une raideur importante dans la bande de transition tout en ayant peu d'ondulation dans les bandes passante et coupée

Identification des paramètres

Une fois la fonction de transfert choisie, il faut procéder à l'identification des paramètres (facteur d'ondulation ε, ordre du filtre etc ...) afin de déterminer ensuite la forme de la fonction de transfert satisfaisant le gabarit. Il faut choisir un certain nombre de points imposés par le gabarit pour déterminer ces paramètres. Le gabarit de type passe-bas impose au moins deux points : l'atténuation maximale à la fréquence de coupure et l'atténuation minimale au début de la bande coupée. Ces deux points permettent en général de trouver les paramètres de la fonction de transfert les moins contraignants, et de trouver ainsi l'ordre minimal du filtre.

[5] ce filtre est donc très utilisé en audio

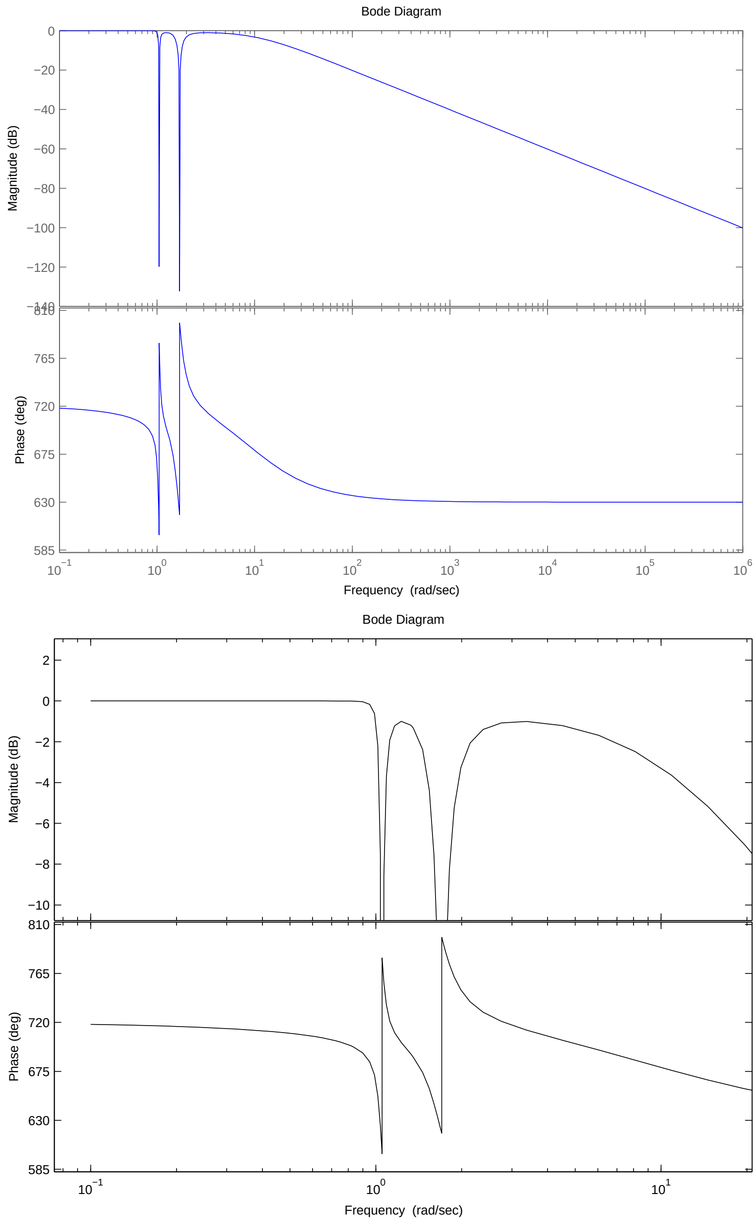


FIG. 1.6 – Filtre de Tchebytcheff inverse (type II) : la figure du bas est un zoom de la figure du haut.

Exemple : méthode analytique. Reprenons l'exemple du filtre passe-bas. Choisissons de le réaliser à l'aide d'une fonction de Butterworth. Il faut déterminer l'ordre du filtre et le paramètre d'ondulation ε. Une solution (qui n'est pas la seule) est de faire passer la fonction de transfert par le point $(\mid F(x=1) \mid) = -3\ dB$ de la bande passante et d'écrire que $(\mid F(x=4) \mid) \leq -20\ dB$. La première équation donne :

$$\mid F(1) \mid_{dB} = -3\ dB \quad \leftrightarrow \quad \mid F(1) \mid^2 = 1/2 \tag{1.16}$$

$$\leftrightarrow \quad \frac{1}{1+\varepsilon^2} = \frac{1}{2} \tag{1.17}$$

$$\leftrightarrow \quad \varepsilon = 1 \tag{1.18}$$

La seconde contrainte s'écrit :

$$\mid F(1) \mid_{dB} \leq -20\ dB \quad \leftrightarrow \quad 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 4^{2n}}} \right) \leq -20 \tag{1.19}$$

$$\leftrightarrow \quad -10 \log \left(1 + 4^{2n}\right) \leq -20 \tag{1.20}$$

$$\leftrightarrow \quad \log \left(1 + 4^{2n}\right) \geq 2 \tag{1.21}$$

$$\leftrightarrow \quad 1 + 4^{2n} \geq 10^2 \tag{1.22}$$

$$\leftrightarrow \quad 4^{2n} \geq 99 \tag{1.23}$$

$$\leftrightarrow \quad 2n \geq \frac{\ln 99}{\ln 4} = 3.3 \tag{1.24}$$

$$\leftrightarrow \quad n \geq 1.6 \tag{1.25}$$

Ainsi, il faut prendre un ordre 2 pour satisfaire le gabarit.

Pour le passe-bande, avec un filtre de Chebycheff, il faut tout d'abord chercher le facteur d'ondulation ε. On peut montrer par récurence que $\forall n\ :\ C_n(1) = 1$. Ainsi, la première condition s'écrit :

$$\mid F(x=1) \mid = -1\ dB \quad \leftrightarrow \quad \mid F(x=1) \mid^2 = 10^{-1/10} \tag{1.26}$$

$$\leftrightarrow \quad \frac{1}{1+\varepsilon^2} = 10^{-1/10} \tag{1.27}$$

$$\leftrightarrow \quad \varepsilon = 0.5 \tag{1.28}$$

Afin de trouver quelle valeur de n satisfait la seconde condition, il faut calculer les différentes valeurs de C_n pour $x = 1.54$. La seconde condition s'écrit, sachant que $-10\ dB = 0.31$:

$$\mid F(x=1.54) \mid \leq 0.31 \quad \leftrightarrow \quad \mid F(x=1) \mid^2 \leq 0.1 \tag{1.29}$$

$$\leftrightarrow \quad \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(1.54)} \leq 0.1 \tag{1.30}$$

$$\leftrightarrow \quad C_n(1.54) > 6 \tag{1.31}$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs :

$$C_0(1.54) = 1$$

$$C_1(1.54) = 1.54$$

$$C_2(1.54) = 3.74$$

$$C_3(1.54) = 9.9$$

On constate donc que $n = 3$ satisfait la condition 1.31.
Pour aller plus loin, si l'on ne dispose pas de Matlab, il faut consulter des tables qui donnent les différents pôles et zéros de la fonction de transfert satisfaisant les conditions imposées, connaissant l'ordre et le paramètre d'ondulation. Il est bien sûr plus rapide et plus précis d'utiliser les fonctions de Matlab.

Exemple : utilisation de Matlab. Si l'on dispose de Matlab, on peut en effet aller plus vite en utilisant l'une des fonctions suivante :

- $[n, \omega_n] = buttord(\omega_p, \omega_s, A_p, A_s,' s')$: n est l'odre du filtre, ω_n est la fréquence de coupure à $-3\ dB$ correspondante, ω_p et ω_s sont les deux fréquences du passe-bas, et A_p et A_n les atténuations correspondantes [6]. Cette fonction ne fournit pas le paramètre d'ondulation ε.
- $[z, p, k] = buttap(n)$: connaissant l'ordre n d'un filtre, cette fonction fournit la forme de la fraction rationnelle associée, dans l'approche de Butterworth. k est le gain statique, z les zéros et p les pôles. Mais cette fonction retourne les valeurs pour un paramètre d'ondulation unitaire ($\varepsilon = 1$). Pour obtenir les bonnes valeurs des pôles, compte-tenu du fait que le dénominateur est de la forme $\varepsilon^2 \times \Omega^{2n}$, il suffit de diviser les pôles par $\sqrt[n]{\varepsilon}$.
- $[n, \omega_n] = cheb1ord(\omega_p, \omega_s, A_p, A_s,' s')$ ou $[n, \omega_n] = cheb2ord(\omega_p, \omega_s, A_p, A_s,' s')$: n est l'odre du filtre, ω_n est la fréquence de coupure à $-3\ dB$ correspondante, ω_p et $\omega - s$ sont les deux fréquences du passe-bas, et A_p et A_n les atténuations correspondantes [7]. "cheb1ord" fournit l'ordre dans le cas de la fonction de Chebycheff de type I, tandis que "cheb2ord" fournit l'ordre de la fonction de type II.
- $[z, p, k] = cheb1ap(n, R)$ ou $[z, p, k] = cheb2ap(n, R)$: connaissant l'ordre n d'un filtre et l'ondulation dans la bande passante (en dB), cette fonction fournit la forme de la fraction rationnelle associée, dans l'approche de Chebytcheff. k est le gain statique, z les zéros et p les pôles. Contrairement à la fonction "buttap", ces fonctions prennent en compte l'ondulation.
- $poly(p)$: cette fonction permet de transformer un vecteur contenant les pôles ou les zéros en un vecteur contenant les coefficients du polynôme associé (sous forme développée).
- $F = tf(num, den, gain)$: cette fonction permet de définir une fonction de transfert à partir des polynômes du numérateur (num), du dénominateur (den) et du gain statique (gain).
- $F = zpk(zeros, poles, gain)$: cette fonction est identique à la précédente, sauf que les entrées concernent les zéros, les pôles et le gain au lieu des polynômes
- $bode(F)$: cette fonction permet de tracer le diagramme de Bode.

[6] attention, il s'agit d'atténuation et non de gain : si le gain vaut par exemple $-3\ dB$, l'atténuation à renseigner vaut 3.

[7] attention, il s'agit d'atténuation et non de gain : si le gain vaut par exemple $-3\ dB$, l'atténuation à renseigner vaut 3.

On retrouve bien les bons ordres à partir de Matlab (en utilisant les fonctions buttord et cheb1ord). Les fonctions *buttap* et *cheb1ap* permettent ensuite d'avoir accès directement aux zéros et aux pôles de la fonction de transfert. Par exemple, la fonction $buttap(2)$ retourne la matrice suivante, contenant les deux pôles complexes (il n'y a pas de zéros et le gain statique vaut 1) : $[-0.7+0.7i \quad -0.7-0.7i]$.
Ce qui correspond au polynôme suivant : $s^2+1.41s+1$. Il s'agit donc de la fonction de transfert suivante :

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1.41s+1}$$

De même, la fonction $cheby1ord(5,1)$ permet d'avoir accès aux 3 pôles s_1, s_2 et s_3 du système :

$$[s_1 \; s_2 \; s_3] = [-0.49 \qquad -0.24+0.96i \qquad -0.24-0.96i]$$

et donc à la fonction de transfert correspondante :

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{0.49}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)} \\ &= \frac{0.49}{(s-s_1)(s^2-2Re(s_2)s+\mid s_2 \mid^2)} \\ &= \frac{0.49}{(s+0.49)(s^2-0.48s+0.98)} \end{aligned}$$

1.2.4 Transposition et dénormalisation

Si le filtre que l'on doit réaliser est un filtre passe-bande ou passe-haut, il faut effectuer la transposition inverse. Il suffit analytiquement de remplacer les variables réduites des fonctions de transfert trouvées précédemment par les expressions des transformations énoncées plus haut.
A l'aide du logiciel Matlab, on peut aussi utiliser les fonctions suivantes :

- $[B, A] = lp2bp(b, a, \omega_0, BP)$: b et a sont les matrices des polynômes du numérateur et du dénominateur [8], ω_0 et BP étant la fréquence centrale et la bande passante du filtre final.
- $[B, A] = lp2hp(b, a, \omega_0)$: b et a sont les matrices des polynômes du numérateur et du dénominateur, et ω_0 est la fréquence du filtre final.

Il faut après dénormaliser la fonction de transfert précédente, si cela n'a pas été fait lors de la transformation précédente (ne pas oublier que $s = \omega/\omega_0$).

Reprenons les exemples précédents :

En ce qui concerne le filtre passe-bas, la dénormalisation donne la fonction de transfert finale suivante :

$$F(p) = \frac{1}{(p/\omega_0)^2+1.41(p/\omega_0)+1}$$

[8] il faut penser à utiliser la fonction $Z = poly(P)$ de matlab qui permet d'obtenir le polynôme Z correspondant aux pôles ou aux zéros contenus dans la matrice P.

Il s'agit donc d'une fonction de transfert du second ordre.
En ce qui concerne le filtre passe-bande, il faut faire la transposition passe-bas/passe-bande, en remplaçant s par $(1/2\sigma)\,(s+1/s)$, ce qui donne :

$$F(s) = \underbrace{\frac{0.49}{\frac{1}{2\sigma}\left(s+\frac{1}{s}+0.49\right)}}_{F_1}\underbrace{\frac{1}{\frac{1}{4\sigma^2}\left(s+\frac{1}{s}\right)^2-0.48\frac{1}{2\sigma}\left(s+\frac{1}{s}\right)+0.98}}_{F_2}$$

La fonction de transfert F est donc le produit de deux fonctions de transfert : F_1 qui est un filtre passe-bande d'ordre 2, et F_2 qui est un filtre passe-bande d'ordre 4. Compte-tenu du fait que $2\sigma = 0.75$, on obtient les fonctions de transfert suivantes :

$$F_1(s) = \frac{0.37\ s}{1+0.37s+s^2}$$

$$F_2(s) = \frac{0.56\ s^2}{s^4-0.36\ s^3+2.55\ s^2-0.36\ s+1}$$

Pour ce dernier filtre, il faut le mettre sous la forme d'un produit de deux fonctions de transfert d'ordre 2 : il faut faire à nouveau la recherche des zéros du polynôme ... (en utilisant par exemple la fonction *roots* de Matlab !) et en tout dernier lieu dénormaliser cette fonction en remplaçant s par p/ω_0.

1.2.5 Réalisation

La méthode énoncée ici permet de synthétiser des filtres passifs ou actifs.

- Si le filtre à synthétiser est passif, il existe des correspondances entre les valeurs des ordres et des ondulations et des réseaux de résistances, inductances ou capacités satisfaisant ces conditions. Les applications de ces filtres sont réservées à des applications bien particulières, en haute fréquence essentiellement. Nous ne développerons pas cette synthèse, qui n'est pas urilisée dans la synthèse des filtres numériques.
- Si le filtre à réaliser est actif, il existe deux méthodes pour trouver les circuits répondant au cahier des charges : la méthode par factorisation et la méthode par variables d'états. Nous ne développerons que la première méthode, qui est la plus simple.
  Ayant la fonction de transfert analytique, il faut décomposer la fraction rationnelle trouvée en produit de fonctions de transfert à coefficients réels du premier ou du second ordre. On peut alors synthétiser chacune de ces fonctions de transfert à l'aide par exemple d'amplificateurs opérationnels (structure de Rauch ou de Sallen-Key par exemple), que l'on peut mettre en cascade (car ce sont des filtres actifs). Dans le cas de l'exemple du passe-bas, on obtient ainsi une fonction de transfert du second ordre que l'on sait réaiser à l'aide d'un ou deux AO.