
ELECTRONIQUE ANALOGIQUE

Notions préliminaires

Cédric KOENIGUER

2004-2005

Table des matières

1	Généralités sur les dipôles.	5
1.1	Les différents dipôles.	5
1.2	Les conventions.	5
1.3	Associations des dipôles.	6
1.3.1	Relation de Chasles. Lois des mailles.	6
1.3.2	Loi des noeuds.	6
1.3.3	Résistances en série.	7
1.3.4	Résistances en parallèle.	7
1.3.5	Inductances en série.	7
1.3.6	Inductances en parallèle.	8
1.3.7	Condensateurs en série.	8
1.3.8	Condensateurs en parallèle.	8
1.4	Montages particuliers.	9
1.4.1	Diviseur de tension.	9
1.4.2	Diviseur de courant.	9
2	Théorèmes généraux.	9
2.1	Extinction des sources.	9
2.2	Théorème de superposition.	10
2.3	Sources équivalentes.	10
2.3.1	Théorème de Thévenin.	10
2.3.2	Théorème de Norton.	11
2.3.3	Equivalence entre les deux représentations.	12
2.4	Théorème de Millman.	12
3	Courants alternatifs.	12
3.1	Quelques rappels et notations.	12
3.2	Notation complexe.	13
3.3	Puissance	15
4	Régime transitoire et diagramme de Bode.	16
4.1	Régime transitoire.	16
4.2	Fonction de transfert.	16

1 Généralités sur les dipôles.

1.1 Les différents dipôles.

On distingue deux types de dipôles :

- les dipôles actifs, nécessitant une source d'énergie (ou fournissant de l'énergie). Leur caractéristique courant-tension ne passe pas par l'origine.
- les dipôles passifs, ne nécessitant pas de sources d'énergie. Leur caractéristique courant-tension passe par l'origine.

Un dipôle est linéaire si sa caractéristique peut se mettre sous la forme d'une loi affine.

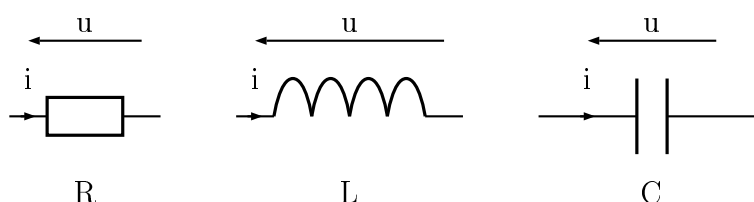
Exemple de dipôles passifs usuels (avec leurs caractéristiques courant-tension, liées aux conventions des schémas ci dessous) :

- la résistance (dipôle linéaire) : $u = Ri$
- l'inductance :

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (1)$$

- la capacité :

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad (2)$$



La diode, dont la caractéristique se met sous la forme : $I = I_s(e^{u/u_t} - 1)$ est un dipôle passif non-linéaire.

*Remarque : les équations 1 et 2 permettent, mathématiquement, de retrouver une information physique sur la continuité de ces grandeurs. L'équation 1 nous indique en effet que le courant est une grandeur dérivable, donc continue. Cette continuité du courant, dans une bobine, s'explique physiquement par la loi de Lenz. Il faut retenir que **le courant dans une bobine est continu**¹ L'équation 2 met en évidence la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur. Il faut retenir que **la tension aux bornes d'un condensateur est continue**².*

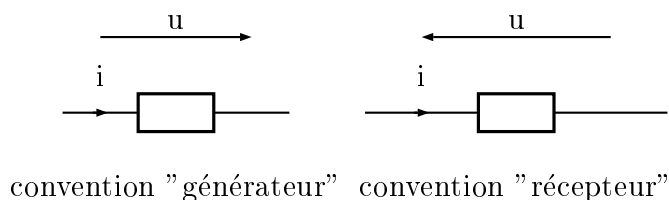
1.2 Les conventions.

On peut adopter deux types de convention concernant l'orientation de la tension par rapport au sens du courant :

¹cette propriété de continuité est utilisée dans certains filtres. On place généralement une inductance dans un circuit (essentiellement en électronique de puissance) afin de lisser le courant.

²de même, une capacité est souvent utile pour lisser une tension dans un circuit (surtout en électronique de puissance)

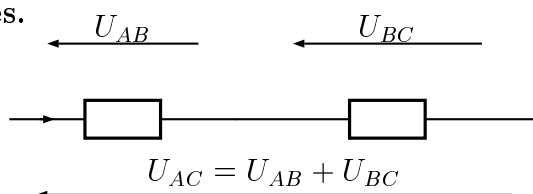
- la convention générateur, pour laquelle la tension et le courant sont orientés dans le même sens.
- la convention récepteur, pour laquelle la tension et le courant sont orientés dans des sens opposés.



1.3 Associations des dipôles.

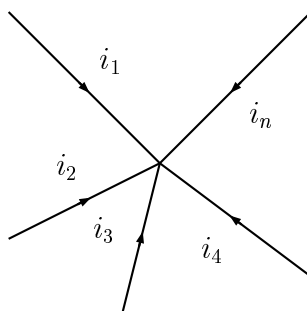
1.3.1 Relation de Chasles. Lois des mailles.

Relation de Chasles.



Loi des mailles. Dans une maille (circuit fermé), la somme algébrique des tensions aux bornes des éléments est nulle.

1.3.2 Loi des noeuds.

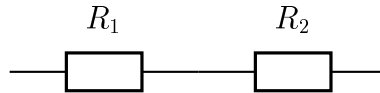


La somme des courants rentrant vers le noeud est égale à la somme des courants sortant du noeud, ou encore :

$$\sum_n \overline{i_n} = 0 \quad (\text{somme algébrique sur toutes les branches})$$

1.3.3 Résistances en série.

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

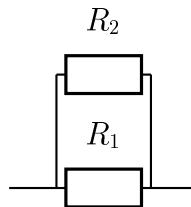


Plus généralement, la résistance équivalente à n résistances en série est égale à la somme des n résistances.

1.3.4 Résistances en parallèle.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Soit : $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$



On définit la conductance G comme étant l'inverse de la résistance R : $G = 1/R$. Plus généralement, la conductance équivalente à n résistances en parallèle est égale à la somme des conductances des n résistances.

1.3.5 Inductances en série.

$$L_{eq} = L_1 + L_2$$

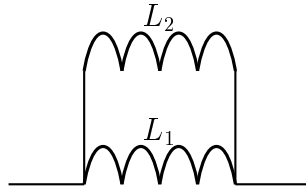


Plus généralement, l'inductance équivalente à n inductances en série est égale à la somme des n inductances.

1.3.6 Inductances en parallèle.

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

$$\text{Soit : } L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

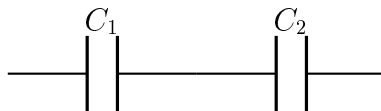


Plus généralement, l'inverse de l'inductance équivalente à n inductances en parallèle est égale à la somme des inverses des n inductances.

1.3.7 Condensateurs en série.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

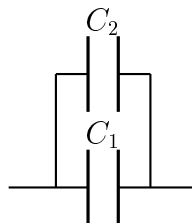
$$\text{Soit : } C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$



Plus généralement, l'inverse de la capacité équivalente à n condensateurs en série est égale à la somme des inverses des n capacités.

1.3.8 Condensateurs en parallèle.

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

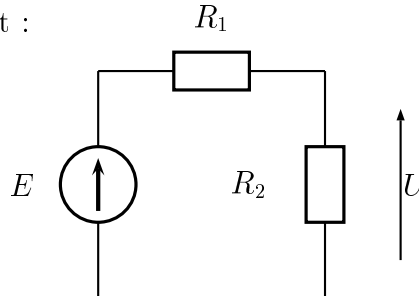


Plus généralement, la capacité équivalente à n capacités en parallèle est égale à la somme des n capacités.

1.4 Montages particuliers.

1.4.1 Diviseur de tension.

Soit le montage suivant :



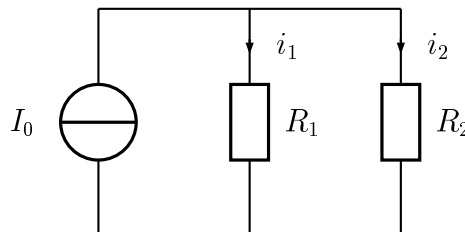
Alors, on a la relation suivante :

$$U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

(voir l'exercice II-1 pour la démonstration.)

1.4.2 Diviseur de courant.

Soit le montage suivant :



On a alors les relations suivantes :

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_0 \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_0$$

(voir l'exercice II-2 pour la démonstration.)

Remarque : ces deux formules sont bien en accord avec la loi des noeuds.

2 Théorèmes généraux.

2.1 Extinction des sources.

On dit qu'une source de tension est éteinte lorsqu'on annule la tension à ses bornes. Une telle source se comporte alors comme un simple fil fermant le circuit. On dit qu'une source de courant est éteinte lorsqu'on annule son courant de court-circuit. Une telle source se comporte alors comme un circuit ouvert.

2.2 Théorème de superposition.

Hyp. : on considère un réseau constitué de dipôles linéaires.

Le courant (resp. la tension) dans une branche d'un réseau linéaire est égal à la somme algébrique des courants dans cette même branche (resp. des tensions aux bornes de cette même branche) en éteignant successivement toutes les sources indépendantes³ sauf une.

2.3 Sources équivalentes.

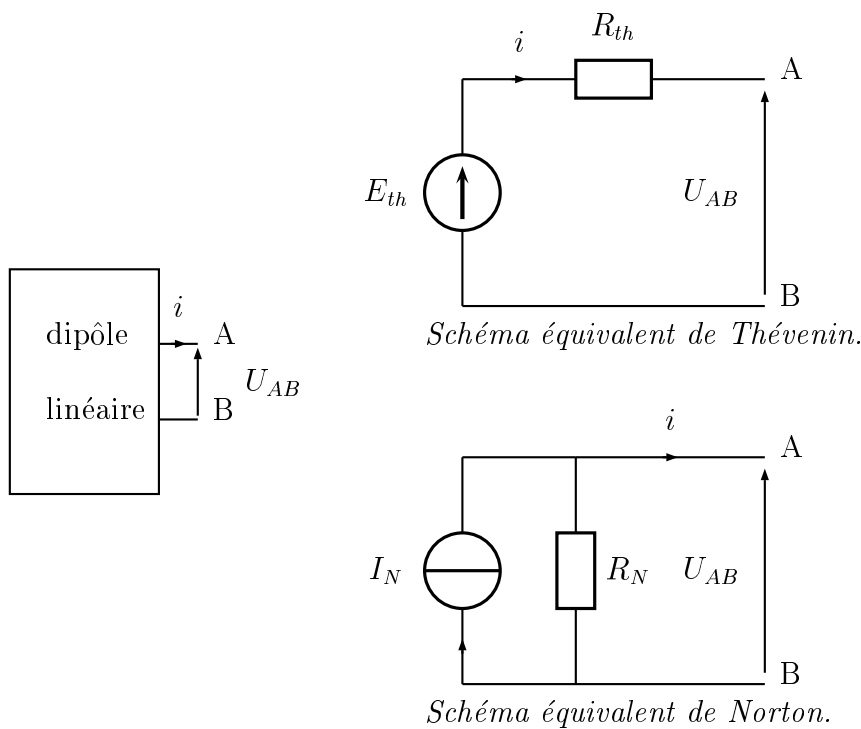


FIG. 1 – Circuits équivalents d'un dipôle linéaire (à gauche) : schéma de Thévenin (en haut à droite) et schéma de Norton (en bas droite)

Nous allons énoncer deux théorèmes qui permettent de réduire tout dipôle à une source et une résistance. Ces deux théorèmes permettent ainsi de simplifier les schémas des montages en vue de leur étude.

2.3.1 Théorème de Thévenin.

Tout réseau linéaire peut être modélisé (entre deux bornes A et B quelconques) par une source de tension idéale E_{th} en série avec une résistance équivalente R_{th} (cf

³ou non commandées, c'est à dire dont la tension ne dépend pas d'une autre tension du circuit. Une source commandée, ou dépendante, est une source qui dépend de la tension d'un autre point d'un circuit.

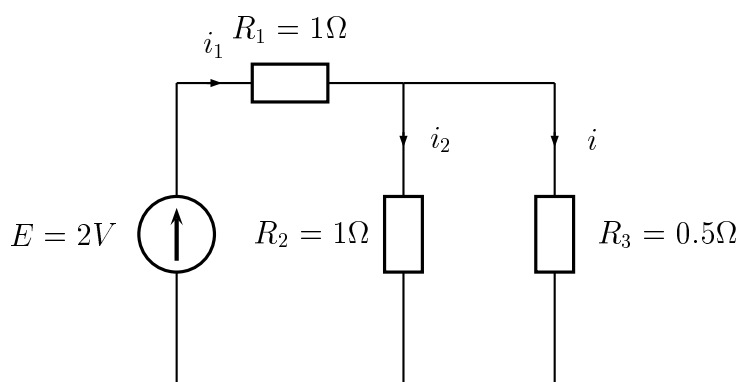
figure 2.3, page 10).

Nous pouvons préciser, en s'aidant du schéma ci dessous, la signification de ces éléments équivalents :

- la source de tension E_{th} est la tension à vide vue entre les points A et B (c'est la tension U_{AB} lorsque le courant de sortie i est nul) : $E_{th} = U_{AB} |_{i=0}$
- la résistance équivalente R_{th} est la résistance équivalente vue entre les points A et B lorsque toutes les sources non commandées sont éteintes.

Remarque : la modélisation d'un circuit entre 2 points A et B n'est qu'une modélisation "vue de l'extérieur" ⁴. Elle ne rend pas compte de ce qui se passe à l'intérieur de la partie de circuit modélisée. L'exemple suivant le justifie.

Considérons le montage :



On en déduit facilement la représentation de Thévenin équivalente au générateur de tension E , aux résistances R_1 et R_2 : $E_{th} = 1V$ et $R_{th} = 0.5\Omega$. En utilisant le schéma initial, on en déduit le courant parcourant la résistance R_1 : $i_1 = E / (R_1 + R_2 // R_3) = 2 / (1 + 1/3) = 1.5A$. En utilisant le modèle de Thévenin, on en déduit le courant parcourant la résistance R_3 : $i = E_{th} / (R_{th} + R_3) = 1A$. En utilisant le schéma initial, on en déduit le courant circulant dans la résistance R_2 : $i_2 = i_1 - i = 0.5A$. On peut alors calculer les puissances P_1 et P_2 dissipées dans les deux résistances R_1 et R_2 : $P_1 = R_1 i_1^2 = 2.25W$ et $P_2 = R_2 i_2^2 = 0.25W$. La puissance totale dissipée dans ce circuit vaut donc : $P = P_1 + P_2 = 2.25 + 0.25 = 2.5W$, tandis que la puissance dissipée dans la résistance équivalente vaut $P_{th} = R_{th} i^2 = 0.5 \times 1 = 0.5W$! On ne retrouve donc pas la bonne puissance dissipée en interne.

2.3.2 Théorème de Norton.

Tout réseau linéaire peut être modélisé (entre deux points A et B quelconques) par une source de courant idéale I_N en parallèle avec une résistance équivalente R_N (cf figure 2.3, page 10).

Nous pouvons aussi en déduire la signification des ces éléments, en s'aidant du schéma :

- la source de courant I_N est le courant de court-circuit entre A et B, c'est à dire que c'est la valeur du courant i lorsque la tension U_{AB} est nulle : $I_N = i |_{U_{AB}=0}$

⁴cette remarque est aussi valable pour le théorème de Norton au paragraphe suivant.

- la résistance équivalente R_N est la résistance équivalente vue entre les points A et B lorsque toutes les sources non commandées sont éteintes.

2.3.3 Equivalence entre les deux représentations.

D'après les significations des éléments, nous pouvons en conclure que : $R_N = R_{th}$. Supposons connue la représentation de Norton. La source de tension E_{th} est telle que $E_{th} = U_{AB} |_{i=0}$. Or, d'après le schéma de Norton : $U_{AB} |_{i=0} = R_N \times I_N$. On en déduit tout simplement que $E_{th} = R_N I_N$.

On a donc l'équivalence suivante entre les deux représentations :

$$R_{th} = R_N \quad (3)$$

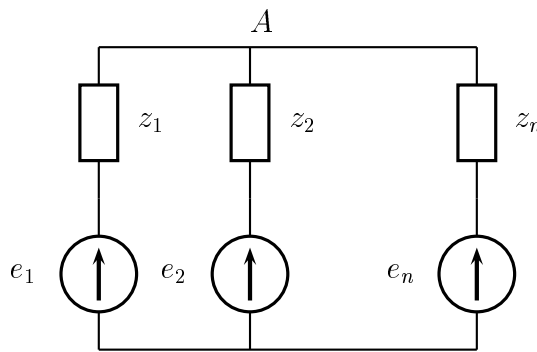
$$E_{th} = R_N I_N \quad (4)$$

On peut ainsi facilement passer d'une représentation à l'autre en utilisant ces équivalences.

2.4 Théorème de Millman.

Considérons un nœud A d'un circuit électrique constitué de n branches. Supposons que chaque branche soit constituée (via une modélisation adéquate, à l'aide du théorème de Thévenin par exemple) d'une impédance z_i et d'une source de tension e_i en série (reliée à la masse). Alors le potentiel du nœud A est relié à ces impédances et à ces sources de tension par la relation suivante :

$$V_A = \frac{\frac{e_1}{z_1} + \frac{e_2}{z_2} + \dots + \frac{e_n}{z_n}}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n}} \quad (5)$$



3 Courants alternatifs.

3.1 Quelques rappels et notations.

Soit un signal sinusoïdal $s_2(t)$, s'écrivant en valeur instantanée sous la forme : $s_2(t) = S_M \sin(\omega t + \phi)$. S_M est la valeur maximale et ϕ la phase à l'origine.

Considérons un signal $s_1(t) = S_M \sin(\omega t)$. ϕ correspond alors au déphasage du signal s_2 par rapport au signal s_1 . En particulier, si ϕ est positif (resp. négatif), le signal s_2 est en avance (resp. en retard) sur le signal s_1 .

Pour un signal périodique s quelconque, de période T , on définit :

- la valeur moyenne, notée $\langle s(t) \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle s(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} s(t) dt\end{aligned}$$

- la valeur efficace S_{eff} :

$$\begin{aligned}S_{eff}^2 &= \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} s(t)^2 dt \\ &= \langle s(t)^2 \rangle\end{aligned}$$

Remarque :

- la valeur moyenne d'un signal sinusoïdal est nulle ; la valeur efficace vaut : $S_{eff} = S_{max}/\sqrt{2}$.
- la valeur moyenne de la tension aux bornes d'une inductance est nulle :

$$\begin{aligned}\langle u_L(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T L \frac{di(t)}{dt} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T L di \\ &= \frac{L}{T} [i(t)]_0^T \\ &= L \frac{i(T) - i(0)}{T} \\ &= 0 \quad \text{car } i \text{ est } T\text{-périodique.}\end{aligned}$$

- la valeur moyenne du courant dans un condensateur est nulle :

$$\begin{aligned}\langle i_C(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T C \frac{du(t)}{dt} dt \\ &= \frac{C}{T} \int_0^T du \\ &= \frac{C}{T} [u(t)]_0^T \\ &= C \frac{u(T) - u(0)}{T} \\ &= 0 \quad \text{car } u \text{ est } T\text{-périodique.}\end{aligned}$$

3.2 Notation complexe.

Considérons un signal sinusoïdal : $s(t) = S\sqrt{2} \sin(\omega t + \phi)$. A ce signal réel, on peut lui associer un signal complexe :

$$\underline{s(t)} = S\sqrt{2}e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$= \underbrace{S\sqrt{2}e^{j\phi}}_{\underline{s}: \text{ amplitude complexe}} e^{j\omega t}$$

La valeur réelle du signal est donc la partie imaginaire de $\underline{s}(t)$: $s(t) = \text{Im}(\underline{s}(t))$. L'opération de dérivation et d'intégration devient alors une simple multiplication ou division par $j\omega$:

$$\frac{d\underline{s}}{dt} = j\omega \underline{s} \quad (6)$$

$$\int \underline{s} = \frac{1}{j\omega} \underline{s} \quad (7)$$

Remarque :

- l'utilisation de la notation complexe simplifie les équations différentielles. Mais elle ne peut être utilisée que dans des équations linéaires. Dès qu'il y a non-linéarité, il faut repasser en valeur réelle. Par exemple, le calcul d'une puissance (qui est un produit de termes donc, a fortiori non linéaire) doit être fait en valeur réelle :

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \times i(t) \\ &\neq \text{Im}(\underline{u}(t) \times \underline{i}(t)) \end{aligned}$$

- on peut prendre une autre convention, pour la notation complexe. En effet, si on a des signaux de la forme : $s(t) = S \cos(\omega t + \phi)$, il peut être avantageux de prendre la notation complexe associée : $\underline{s}(t) = S e^{j(\omega t + \phi)}$. La valeur réelle est tout simplement dans ce cas la partie réelle de la valeur complexe associée : $s(t) = \text{Re}(\underline{s}(t))$. Il faut bien choisir sa convention et s'y tenir tout au long d'un problème donné.

Quelques rappels sur les nombres complexes.

On utilise deux types de représentations pour tout nombre complexe z donné :

- la notation cartésienne : $z = x + jy$ (x est la partie réelle, y la partie imaginaire).
- la notation exponentielle : $z = \rho e^{j\varphi} = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi)$

On peut donc passer aisément d'une représentation à l'autre en utilisant les formules suivantes :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Autre rappel : racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité :

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \left\{ z_k = e^{j\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0; 1; \dots; n-1\} \right\}$$

Impédances complexes.

A tout dipôle linéaire "réel", on peut alors lui associer une impédance complexe $\underline{z}$ définie par analogie avec la résistance par : $\underline{z} = \frac{u}{i}$ (en convention générateur). Pour les dipôles classiques :

$$\begin{aligned} \text{Résistance : } \underline{Z}_r &= R \\ \text{Inductance : } \underline{Z}_l &= jL\omega \\ \text{Capacité : } \underline{Z}_c &= \frac{1}{jC\omega} \end{aligned}$$

Remarque 1 : Cette impédance complexe permet de s'affranchir des opérations de dérivation ou d'intégration dans les équations d'un système. Cette notion contient à la fois le gain du dipôle (module) et une information sur le déphasage courant-tension (contenue dans la phase). Ces formules permettent aussi de retrouver simplement le comportement de ces dipôles en régime établi en continu et aux très hautes fréquences. Par exemple, si $\omega \rightarrow 0$ (cas du régime continu), $\underline{Z}_l \rightarrow 0$: l'inductance est équivalente à un fil (pour lequel on néglige les résistances de perte!). Le tableau suivant récapitule le comportement de ces dipôles :

$\omega \rightarrow 0$	$\underline{Z}_l \rightarrow 0$	inductance équivalente à un court-circuit (fil) en très basse fréquence
$\omega \rightarrow \infty$	$\underline{Z}_l \rightarrow \infty$	inductance équivalente à un circuit ouvert en hautes fréquences
$\omega \rightarrow 0$	$\underline{Z}_c \rightarrow \infty$	capacité équivalente à un circuit ouvert en très basses fréquences
$\omega \rightarrow \infty$	$\underline{Z}_c \rightarrow 0$	capacité équivalente à un court-circuit (fil) en hautes fréquences

Remarque 2 : L'utilisation des impédances complexes ne remet pas en cause les notions étudiées au début de ce poly :

- Les théorèmes généraux vus précédemment sont valables avec les impédances complexes. L'impédance équivalente de Thévenin et de Norton est l'impédance du circuit vue entre les deux points considérés lorsque l'on éteint toutes les sources indépendantes. Les générateurs correspondants ont la même signification.
- Les lois d'association des impédances complexes sont les mêmes que les lois relatives aux résistances : en série les impédances complexes s'ajoutent et en parallèle les inverses des impédances s'ajoutent.

3.3 Puissance

On définit la puissance instantanée (à un instant t) comme étant le produit du courant et de la tension : $p(t) = v(t) \times i(t)$. Généralement, le terme seul de "puissance" désigne la puissance active, c'est à dire la valeur moyenne de la puissance instantanée : $P = \langle p(t) \rangle = \langle v(t)i(t) \rangle$.

En régime harmonique : si $v(t) = V_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t$ et $i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$, alors : $P = V_{eff}I_{eff}\cos\varphi$.

4 Régime transitoire et diagramme de Bode.

4.1 Régime transitoire.

Le régime transitoire est la période qui précède le régime permanent (pour lequel le signal de sortie est définitif). On excite le circuit avec un certain signal et on observe la réponse du système à ce signal. Le régime transitoire correspond "à la première réponse" du système. Au bout d'un certain temps, le régime permanent est atteint. D'un point de vue expérimental, on prend généralement comme source d'entrée une tension en créneaux.

D'un point de vue théorique, la forme du régime transitoire correspond à la solution temporelle des équations différentielles décrivant le système.

4.2 Fonction de transfert.

Généralités.

Il s'agit d'étudier le comportement de la sortie d'un quadripôle lorsqu'on le soumet à une entrée sinusoïdale. On observe ainsi la réponse en sortie, en module et en phase, la pulsation du signal de sortie étant la même que celle du signal d'entrée (régime harmonique). La fonction de transfert est le rapport (complexe) de la grandeur de sortie sur celle de l'entrée : $T(\omega) = \frac{s(\omega)}{e(\omega)}$. Le module de cette fonction de transfert donne le gain du quadripôle, la phase donne une information sur le déphasage entre les signaux d'entrée et de sortie. En faisant varier ce rapport en fonction de la pulsation, on peut ainsi observer (si il s'agit d'une expérience) ou prévoir (si on est dans le cadre d'une étude théorique) le comportement du système à différentes fréquences.

Les décibels.

En ce qui concerne le gain, il est d'usage d'introduire une nouvelle grandeur : les décibels, notée : dB.

Dans un cas général, si la grandeur concernée est une puissance (en Watt), le gain en dB associé est défini comme suit : $G|_{dB} = 10 \log \frac{P|_W}{1W} = 10 \log P$.

Si la grandeur considérée est une tension, on se réfère alors à la puissance dissipée dans une résistance de charge R : $G|_{dB} = 10 \log V^2/R$. On peut alors exprimer un rapport de tensions en décibel en fonction du rapport en linéaire : $V_2/V_1 = 10 \log \left(\frac{V_2^2/R}{V_1^2/R} \right) = 10 \log (V_2/V_1)^2 = 20 \log V_2/V_1$. Il y a donc un facteur multiplicatif 2 entre la définition d'un rapport de puissances en décibels et un rapport de tensions en décibels (provenant de la relation : $P = V^2/R$).

Les électroniciens introduisent aussi une autre grandeur, appelée "dBm"⁵. Les décibels permettent de comparer en réalité une puissance par rapport à une puis-

⁵le "m" signifie milliWatt.

sance unité (1 W). Les dBm quantifient une puissance par rapport à 1mW :

$$\begin{aligned}
 G|_{dBm} &= 10 \log \frac{P|_W}{1mW} \\
 &= 10 \log \frac{P|_W}{10^{-3}W} \\
 &= 10 \log \frac{P|_W}{1W} - 10 \log 10^{-3} \\
 &= G|_{dB} - 30
 \end{aligned}$$

Le passage des dB aux dBm s'effectue par simple translation d'un facteur 30. La fonction de transfert d'un quadripôle est le rapport de deux tensions, de deux courants ou est une impédance. Tracer les diagrammes de Bode en module et en phase consiste à tracer les variations du gain et de la phase en fonction de la fréquence des signaux. Le gain, dans un diagramme de Bode, se représente toujours en décibel. L'axe des abscisses est presque toujours un axe en échelle logarithmique. L'axe des ordonnées peut éventuellement l'être.

Remarque : le passage d'une pulsation ω à la pulsation 10ω constitue sur le diagramme une décade.

La division d'un gain (en linéaire) par $\sqrt{2}$ est équivalent à soustraire 3dB au gain exprimé en dB : $T/\sqrt{2} \Leftrightarrow T|_{dB} - 3dB$

Utilité d'une échelle logarithmique.

La figure 2 montre trois diagrammes de Bode (en gain) pour un même filtre (filtre passe-haut RC du premier ordre). La figure du haut représente le gain en fonction de la pulsation (en échelle linéaire). Nous voyons l'allure d'un passe-haut qui nous semble "idéal" (pente infinie à la fréquence de coupure). Nous ne pouvons pas représenter l'allure de ce gain sur plusieurs ordre de grandeurs, la dimension de la feuille ne nous le permettant pas. Sur un tel graphique, nous sommes donc obligés de choisir une petite plage de variation en fréquence. Nous ne pouvons donc pas avoir une vue d'ensemble.

La seconde figure représente ce même gain tracé en fonction de la pulsation mais en échelle logarithmique (ce qui revient à tracer ce gain en fonction de $\log \omega$ en échelle linéaire). Nous pouvons déjà remarquer que sur une même taille de graphique, nous pouvons représenter les variations de ce gain sur plusieurs ordres de grandeur de pulsation : ici 5, ce qui est un avantage de l'échelle logarithmique. En outre, nous pouvons observer que ce filtre est moins idéal qu'il nous semblait au premier abord : la pente au niveau de la fréquence de coupure n'est plus infinie. Ce type de représentation permet donc de mieux étudier les variations des pentes. Le graphique du bas présente enfin le type de diagramme couramment utilisé : le gain en dB en fonction de la pulsation en échelle logarithmique. L'utilisation des décibels permet d'avoir une plus grande plage de variation du gain. On peut par exemple mesurer la pente : 20 dB/déc.

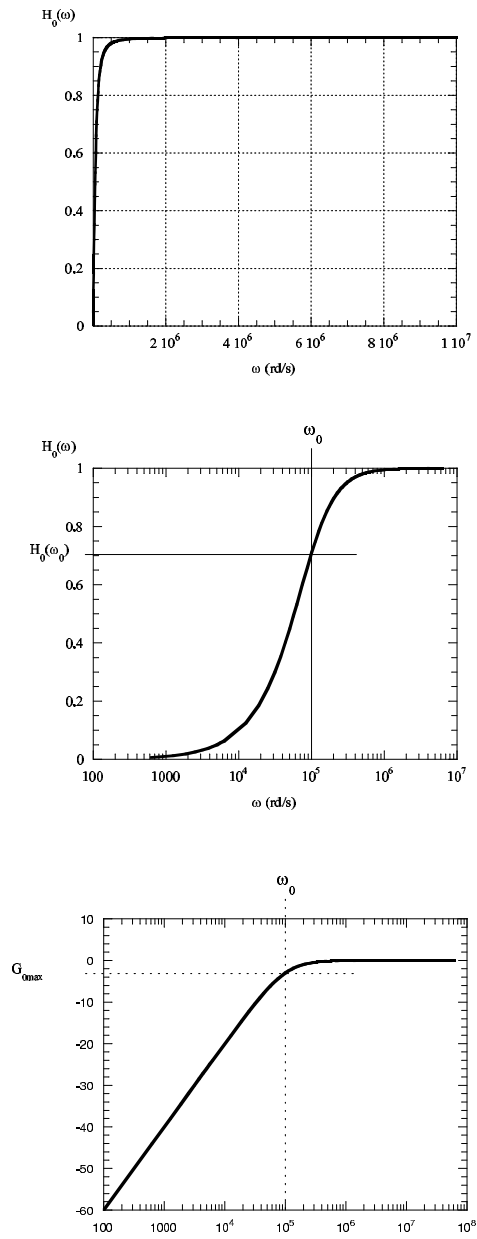


FIG. 2 – Diverses représentations d'un diagramme de Bode en amplitude d'un filtre passe-haut.

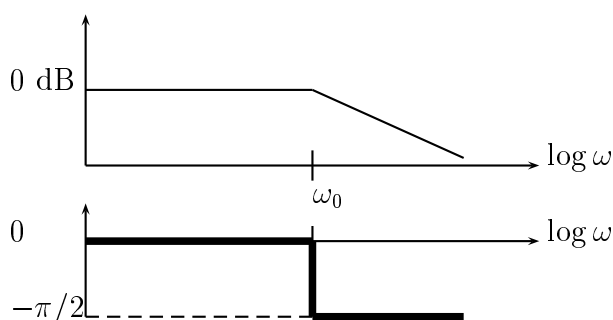
Diagramme de Bode.

Avant de tracer le gain réel et la phase réelle en fonction de la pulsation, il est utile de tracer les diagrammes asymptotiques, c'est à dire les allures de ces fonctions loin des pulsations caractéristiques.

Par exemple, si la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre se met sous la forme :

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

on peut approcher cette fonction en très basse fréquence (loin de la pulsation caractéristique ω_0) par la fonction constante égale à 1 (si $\omega \ll \omega_0 : 1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1$). Le diagramme asymptotique sera donc, en dessous de cette pulsation caractéristique, une droite constante égale à 1 pour le gain (soit 0 dB) et pour la phase une droite correspondant à une phase nulle. Au dessus de cette pulsation (en hautes fréquences), la fonction de transfert peut être approchée par la fonction $\omega \rightarrow \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$. Le module s'écrit alors, en dB : $|T(\omega)|_{dB} \approx 20 \log\left(\frac{1}{\omega/\omega_0}\right) = -20 \log(\omega) + 20 \log(\omega_0)$. Le gain est donc une droite de pente négative (-20 dB/décade) et la phase vaut $-\pi/2$. D'où l'allure suivante asymptotique du filtre passe-bas.



Remarques :

- on ne trace les asymptotes que sur les domaines de fréquence où elles sont valables. Par exemple, le gain peut être approché par une droite de pente - 20 dB/déc. uniquement pour des pulsations $\omega > \omega_0$. On ne prendra pas en compte cette droite pour des pulsations inférieures à ω_0 . Mais généralement, on trace ces courbes asymptotiques également aux pulsations caractéristiques. Les deux asymptotes se croisent en effet en ω_0 .
- Ce diagramme asymptotique permet d'avoir l'allure des courbes loin des pulsations caractéristiques. Sur l'exemple du passe bas, on sait ainsi que la courbe réelle sera voisine des asymptotes tracées en très basse fréquence et en très haute fréquence. Mais on ne sait pas a priori où se situe la courbe réelle au voisinage de la pulsation caractéristique ω_0 .
- Pour tracer le diagramme réel, on approche la courbe des asymptotes loin des pulsations caractéristiques et on complète par quelques points bien choisis au voisinage de ces pulsations. Par exemple, pour le passe bas étudié, on peut évaluer le gain et la phase en $\omega = \omega_0$:

$$\begin{aligned}
|T(\omega_0)|_{dB} &= 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_0}\right)^2}} \right) \\
&= 20 \log (1/\sqrt{2}) \\
&= -3dB
\end{aligned}$$

Le gain réel est donc 3dB en dessous du diagramme asymptotique en $\omega = \omega_0$ (puisque la valeur du diagramme asymptotique vaut 0 dB). En ce qui concerne la phase :

$$\begin{aligned}
\arg(T(\omega_0)) &= -\arctan(1) \\
&= -\pi/4
\end{aligned}$$

Il faudra chercher à factoriser au maximum les fonctions de transfert et à les mettre sous la forme de produits de fonctions de transfert connues ⁶ (filtres du premier ou du second ordre par exemple) : $\overline{T} = \overline{T}_0 \overline{T}_1 \cdots \overline{T}_n$. Le gain et la phase se mettent alors sous la forme de sommes de fonctions élémentaires (puisque les décibels et les arguments complexes s'ajoutent) : $G = G_0 + G_1 + \cdots + G_n$ et $\phi = \phi_0 + \phi_1 + \cdots + \phi_n$. Les diagrammes asymptotiques (c'est à dire les asymptotes aux courbes réelle, loin des pulsations caractéristiques) s'obtiennent alors par simple addition des formes élémentaires (pour le gain et la phase).

Dans certains cas complexes, il peut être plus commode d'étudier la fonction de départ directement et de chercher à la simplifier en fonction des domaines de fréquence à étudier.

Remarque : utilité de l'étude d'un système en fonction des fréquences.

Il est en effet utile de se poser la question suivante : pourquoi étudier le système pour des signaux sinusoidaux ou encore, ce qui est équivalent quel est le but de l'étude de la fonction de transfert en régime harmonique pour différentes fréquences ? A priori, il est vrai que la plupart des signaux véhiculant une information ne sont pas des signaux sinusoidaux. En réalité, si l'on souhaite étudier la réponse à un signal périodique "plus complexe" $e(t)$, il faut se souvenir qu'un signal périodique, quel qu'il soit, peut se décomposer en série de Fourier, et donc en somme de termes sinusoidaux de différentes fréquences : $e(t) = \sum_n A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$. En vertu du principe de superposition et de la linéarité des systèmes étudiés, la réponse $s(t)$ à un tel signal — c'est à dire la réponse d'une somme de signaux sinusoidaux — est en fait la somme des réponses de chaque signal sinusoidal : $s(t) = \sum_n H(A_n \sin(n\omega t + \varphi_n))$, où H est une fonction modélisant l'effet du circuit. On voit donc que l'étude en régime harmonique est essentielle.

⁶l'annexe située sur les pages suivantes récapitule les diagrammes de Bode asymptotiques des fonctions de transfert simples.